maxi maths

Exercices résolus

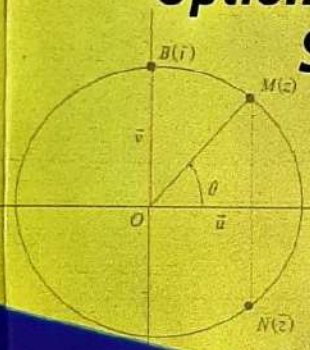
Mathématiques

Sc Math

2ème Année Baccalauréat

Option sciences mathématiques

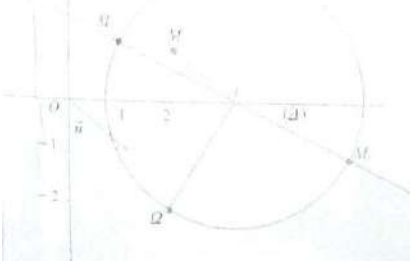
Section internationale



Tome 1

2ème BAC S=M

- Résumés de Cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse
- Extraits de sujets du bac



EDITIONS Plus

For more visit: L9ray.com

For more visit: L9ray.com
CamScanner

L9RAY

Maxi Maths

Exercices résolus

MATHEMATIQUES

Sc Math

2ème année du baccalauréat

Option sciences mathématiques

Section internationale

(Tome 1)

- Résumés de cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse
- Extraits de sujets du bac

Auteurs:

Groupe d'auteurs

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

For more visit: L9ray.com

CamScanner

Tous droits réservés

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

Maxi.Maths - SC MATH 2BAC TOME (1) - Exercices résolus

Édition 2020

Dépôt légal: 2020MO2109

ISBN: 978-9920-670-07-4

Imprimerie Najah Al Jadida (CTP) - Casablanca

For more visit: L9ray.com

CamScanner

Avant - propos

Chèr (e) élève,

Ce livre a été conçu pour permettre aux élèves un travail régulier et continu tout au long de l'année de la classe terminale. Il a été préparé pour vous aider à acquérir la rigueur nécessaire à la réussite aux contrôles continus durant toute l'année scolaire et à l'examen national du baccalauréat, en vous proposant des exercices et des problèmes conformes au programme officiel.

Ce livre contient les chapitres suivants :

1- Continuité d'une fonction numérique

2- Dérivation et étude de fonctions

3-Les suites numérique

4- Fonctions logarithmiques

5- Nombres complexes

Le contenu de chaque chapitre est conçu de la façon suivants :

- Des résumés de cours organisés suivant chaque paragraphe.
- Des exercices préparatoires pour mieux aborder le programme et en faire un point de départ pour l'élaboration d'une base solide en la matière.
- Des exercices classés, ordonnés et progressifs de chaque partie du cours.
- Des exercices de renforcement et de synthèse pour l'enrichissement personnel; ils combinent méthodes, outils et contenus mathématiques.
- Des extraits des sujets d'examens du baccalauréat.

Nous souhaitons vivement que ce livre réponde à vos attentes et participe à votre réussite au baccalauréat...

Les auteurs

For more visit: L9ray.com
CamScanner

1 Leçon Continuité d'une fonction numérique

Maxi.

Résumé

I Continuité en un point - Continuité sur un intervalle

1) Continuité en un point:

Définition: Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

On dit que la fonction f est continue au point x_0 si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) Continuité à droite-continuité à gauche en un point:

Définitions:

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[x_0; x_0 + \alpha[$ où $\alpha > 0$.

On dit que la fonction f est continue à droite au point x_0 si : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha; x_0]$ où $\alpha > 0$.

On dit que la fonction f est continue à gauche au point x_0 si : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$

Propriété:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
La fonction f est continue au point x_0 si et seulement si, f est continue à droite et à gauche au point x_0.

3) Continuité sur un intervalle:

Définitions:

- On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I, si elle est continue en tout point de I.
- On dit qu'une fonction f est continue sur le segment $[a; b]$, si elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ et continue à droite au point a et à gauche au point b.

4) Continuité des fonctions usuelles:

Propriété:

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$; la

For more visit: L9ray.com
CamScanner

fonction $x \mapsto \cos x$ et la fonction $x \mapsto \sin x$ sont continues sur tout intervalle inclu dans leurs ensemble de définition.

II Image d'un intervalle par une fonction continue

1) Image d'un segment-Image d'un intervalle:

Propriété:

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

2) Théorème des valeurs intermédiaires:

Théorème:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I. Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre réel c compris entre a et b tel que : $f(c)=k$.

Conséquence:

Si f est continue sur le segment $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)<0$, alors l'équation : $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a;b[$ et l'équation admet une solution unique si f est strictement monotone sur $[a;b]$.

3) Cas où f est continue et strictement monotone:

a) f est continue et strictement croissante

I	$f(I)$
$[a;b]$	$[f(a)\ ;\ f(b)]$
$[a;b[$	$\left[f(a)\ ;\ \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\right[$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\ ;\ f(b)\right]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\ ;\ \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\right[$

b) f est continue et strictement décroissante

I	$f(I)$
$[a;b]$	$[f(b)\ ;\ f(a)]$
$[a;b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\ ;\ f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left[f(b)\ ;\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\ ;\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\right[$

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel c de $[a;b]$ tel que : $f(c)=k$

For more visit: L9ray.com CamScanner

4) Opérations sur les fonctions continues:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$

- Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle I, alors les fonctions $f+g$, $f \times g$ et kf sont continues sur I.
- Si f et g sont continues sur I et g ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors les deux fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

III Continuité de la composée de deux fonctions

- Soit f et g deux fonctions numériques.
- Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors la fonction gof est continue sur I.
- Soit f est une fonction définie sur un intervalle I et g est une fonction définie un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ et $x_0 \in I$.

  Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle I tels que $f(I) \subset J$.

Si f admet une limite finie ℓ en x_0 et si g est continue en ℓ alors la fonction gof admet la limite $g(\ell)$ au point x_0.

Exercices d'application

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{3x-5}}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1}\right)$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} + x$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x\sqrt{x^2+x} - 2x^2 - x}{2\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x^3 + ax^2 - 3 \ ; \ x \leq 1 \\ f(x) = ax + b \ ; \ 1 < x < 2 \\ f(x) = \dfrac{ax^2+2}{3x-1} \ ; \ x \geq 2 \end{cases}$

Déterminer les nombres a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3}}{x^2} & ; x \neq 0 \\ f(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{12} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : |f(x)| \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}$;

b) En déduire : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x)$

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos^4 x}{x.\sin x.\cos x} & ; x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\\ f(x) = \dfrac{3\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} & ; x \in [0; +\infty[\end{cases}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} f(x)$

2) Etudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 0$

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2x + \dfrac{x^2 - 5x + 6}{|x^2 - 9| - |x - 3|}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité au point $x_0 = 3$?

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\cos(4x)}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f

2) a) Soit h un élément de l'ensemble $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[- \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$;

Montrer que : $f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \dfrac{2\tan^2 h}{(1-\tan h)^2.\sin^2(2h)}$

b) Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 7

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\cos x - \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}}{x}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Montrer que f est prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$

Exercice 8

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{\pi\}$ par :

$$f(x) = \frac{x.\sin x - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x - \pi}$$

1) Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$, montrer que :

$$f(x + \pi) = -\sin x - \pi.\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

2) Montrer que f est prolongeable par continuité au point $x_0 = \pi$.

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x - E(x)}$.

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} f(x)$.

3) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$?

Exercice 10

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$.

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Étudier la parité de la fonction f.

2) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right) ; 0 < f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

3) Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$

Exercice 11

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \tan\left(\sqrt{x}.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{\tan^2 x - \pi \tan x}{2x}\right)$

Exercice 12

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right)$

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |f(x)| < |x|$ et en déduire que f est prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = (\sin x)E\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que : $(\forall x \in]0;\pi[) ; \frac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \frac{\sin x}{x}$

et $(\forall x \in]-\pi;0[) ; \frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x$

b) La fonction g admet-elle un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$?

3) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{|x|}}$

La fonction h admet-elle un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$?

Exercice 13

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{|x| - E(x)} - x$

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) Soit k un entier relatif.

a) Étudier la continuité de f à gauche et à droite au point $x_0 = k$

b) Étudier la continuité de f sur l'intervalle $]k;k+1[$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x) = x \times \sqrt{1 + \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} & ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \sqrt{1+x^2} < f(x) \leq \sqrt{x^2 + (x+1)^2}$;

b) En déduire que la fonction f est continue à droite au point $x_0 = 0$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in [-1;0[) ; -\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2 + (x+1)^2}$;

b) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

4) La fonction f est-elle continue au point $x_0 = 0$?

Exercice 15

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{E\left(\frac{2}{x}\right) - 1}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

2) a) Montrer que : $(\forall x \in D) ; \frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$

b) En déduire que la fonction f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 16

1) Montrer que l'équation : $\sqrt{x} - x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0;1[$.

2) Montrer que l'équation : $\sin x = 1 - x$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$.

3) Montrer que la courbe de la fonction f telle que: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse a tel que $0 < a < 1$.

Exercice 17

Soit α et β deux éléments de $\mathbb{R}^*_+$ et f une fonction continue sur le segment $[0;1]$ telle que : $f(0) \neq f(1)$.

Montrer que : $(\exists x_0 \in]0;1[)\ ; \alpha f(0) + \beta f(1) = (\alpha + \beta) f(x_0)$

Solutions

Exercice 1

1) Calculons $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$

Soit x un élément de $]1;+\infty[$, on a :

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1} \times \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}} + \sqrt{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{1}{x+1}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{\dfrac{1}{x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \times \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{1}{2} \times 0 = 0$

Alors : $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \times \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\dfrac{1}{x+1}} \right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc :

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) Calculons $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{3x-5}}$

Soit x un élément de l'intervalle $\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$ et $x \neq 2$, on a :

$\sqrt{x+2} - 2 = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}$ et $1 - \sqrt{3x-5} = \dfrac{-3(x-2)}{1+\sqrt{3x-5}}$, donc :

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} \times \frac{1+\sqrt{3x-5}}{-3(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-(1+\sqrt{3x-5})}{3(\sqrt{x+2}+2)} = -\frac{1}{6}$$

3) Calculons $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$ et $x \neq 1$, on a :

$$\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{x^2-1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}-1=(x+1)(\sqrt{x}+1)-1$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x}+1)-1=3$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$\frac{1}{x}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}2+\frac{1}{x^2}=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{2}-1$$

5) Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty;0[$, on a :

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x=-x\sqrt{\frac{x}{x-1}}+x=x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right)$$

$$=x\frac{1-\frac{x}{x-1}}{1+\sqrt{\frac{x}{x-1}}}=-\frac{x}{x-1}\times\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{x-1}\times\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{x-1}}}\right)=-\frac{1}{2}$

6) Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{x^2+x}-2x^2-x}{2\sqrt{x^2+1}}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$2x\sqrt{x^2+x}-2x^2-x=-(x^2+x-2x\sqrt{x^2+x}+x^2)=-(\sqrt{x^2+x}-x)^2$$

$$=-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right)^2=-\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)^2$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\sqrt{x^2+x}-2x^2-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)^2\right)=-\frac{1}{4}$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{x^2+x}-2x^2-x}{2\sqrt{x^2+1}}=0\times\left(-\frac{1}{4}\right)=0$

Exercice 2

Déterminons a et b

On a :

- La fonction $x\longmapsto x^3+ax^2-3$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme, donc f est continue sur l'intervalle $]-\infty;1]$.
- La fonction $x\longmapsto ax+b$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme, donc f est continue sur l'intervalle $]1;2[$
- La fonction $x\longmapsto\frac{ax^2+2}{3x-1}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$, car c'est une fonction rationnelle donc f est continue sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

D'où f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1) \text{ et } \lim_{x\to2^-}f(x)=f(2)$$

On a : $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(ax+b)=a+b$ et $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(ax+b)=2a+b$

et $f(1)=a-2$ et $f(2)=\frac{4a+2}{5}$

Donc : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)\\ \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=f(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=a-2\\ \frac{4a+2}{5}=2a+b\end{cases}$

$\Leftrightarrow b=-2$ et $a=2$

Par suite f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=2$ et $b=-2$

Exercice 3

1) Montrons que f est continue en $x_0=0$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x)=\frac{(\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3})(\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3})}{x^2(\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\cos x-1}{x^2(\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3})}=\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3}}\right)$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Alors : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3}}\right)=-\dfrac{1}{4\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}=f(0)$, d'où f est continue en $x_0=0$

2) a) Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)|\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$, on a : $|f(x)|=\dfrac{|\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}|}{x^2}$

et on a : $|\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}|\leq\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3}$

Puisque : $-1\leq\cos x\leq 1\Longrightarrow 1\leq 2+\cos x\leq 3$

$\Longrightarrow 1\leq\sqrt{2+\cos x}\leq\sqrt{3}$

Alors : $\sqrt{2+\cos x}+\sqrt{3}\leq 2\sqrt{3}$ donc : $|\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}|\leq 2\sqrt{3}$

D'où : $\dfrac{|\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}|}{x^2}\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}$, c'est-à-dire : $|f(x)|\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}$

Ainsi : $(\forall x\in IR^*)\ ;\ |f(x)|\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}$

b) Déduction :

On a : $\begin{cases}(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)|\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}\\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}=0\end{cases}$

Donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=0$

Exercice 4

1) • Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}\left(3\sqrt{\frac{1}{x}+x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)}=\frac{3\sqrt{\frac{1}{x}+x}-1}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\sqrt{\frac{1}{x}+x}-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}+1=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sqrt{\frac{1}{x}+x}-1}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• Calculons : $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}} f(x)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit x un élément de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$, on a :

$$f(x)=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin x\cos x}$$

$$=\left(\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{x\sin x}\right)\times\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)$$

$$=\left(\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{x\sin x}\right)\times\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{x\sin x}\right)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$ et $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\cos x=0^+$

alors $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{x\sin x}\right)\times\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}f(x)=+\infty$

2) Étudions la continuité de f en $x_0=0$.

On a : $f(0)=\frac{3}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}=f(0)$

• Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$, on a :

$$f(x)=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin x\cos x}=\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos x}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{\sin x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos x}=3$

alors: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos x}=\frac{3}{2}$,donc : $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\frac{3}{2}=f(0)$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\frac{3}{2}=f(0)$, c'est-à-dire f est continue à gauche en $x_0=0$

et puisque: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$, alors f est continue en $x_0=0$

Exercice 5

1) Déterminons D

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x\in D\iff |x^2-9|-|x-3|\neq 0$

Puisque : $|x^2-9|-|x-3|=0\iff |x-3|(|x+3|-1)=0$

$\iff |x-3|=0$ et $|x+3|=1$

$\iff x=3$ ou $x=-2$ ou $x=-4$

Alors : $x\in D\iff x\neq 3$ et $x\neq -4$ et $x\neq -2$ donc : $D=\mathbb{R}-\{3;-2;-4\}$

2) Étudions si f admet un prolongement par continuité en $x_0=3$

• Calculons $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $x \in D$, on a : $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

Donc : $f(x) = 2x + \dfrac{(x-3)(x-2)}{|x-3|(|x+3|-1)}$

D'où : $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+}\left(2x + \dfrac{x-2}{|x+3|-1}\right) = \dfrac{31}{5}$

et $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-}\left(2x - \dfrac{x-2}{|x+3|-1}\right) = \dfrac{29}{5}$ ainsi $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

Par suite la fonction f n'admet pas de limite au point $x_0 = 3$, donc f n'est pas prolongeable par continuité au point $x_0 = 3$

Exercice 6

1) Déterminons D.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right)$ et $1 + \cos(4x) \neq 0$

Puisque : $1 + \cos(4x) = 0 \iff \cos(4x) = -1$

$\iff 4x = \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}$

alors : $x \in D \iff \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right)$ et $\left(x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right)$

Donc : $D = \mathbb{R} - \left(\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$

2) a) Montrons que : $f\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right) = \dfrac{2\tan^2 h}{(1-\tanh)^2 . \sin^2(2h)}$

Soit $h \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[- \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$, on a : $f\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right) = \dfrac{\left(1 - \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right)\right)^2}{1 + \cos(\pi + 4h)}$

Puisque : $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right) = \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4} + \tan h}{1 - \tan\dfrac{\pi}{4}\tan h} = \dfrac{1 + \tan h}{1 - \tan h}$

alors : $1 - \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right) = 1 - \dfrac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = \dfrac{-2\tan h}{1 - \tan h}$

et on a : $1 + \cos(\pi + 4h) = 1 - \cos(4h) = 2\sin^2(2h)$

Donc : $f\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right) = \dfrac{1}{2\sin^2(2h)} \times \left(\dfrac{-2\tan h}{1 - \tan h}\right)^2 = \dfrac{2\tan^2 h}{(1 - \tan h)^2 . \sin^2(2h)}$

b) Montrons que f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Calculons $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x)$

On pose : $h = x - \dfrac{\pi}{4}$

et on a : $f(x) = f\left(h + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2\tan^2 h}{(1 - \tan h)^2 . \sin^2(2h)} = \dfrac{2}{(1 - \tan h)^2} \times \dfrac{\left(\dfrac{\tan h}{h}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin(2h)}{h}\right)^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Puisque : $\lim_{h\to 0}\frac{\tan h}{h}=1$ et $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2h)}{h}=2$ et $\lim_{h\to 0}\tan h=0$,

alors : $\lim_{h\to 0}\frac{2}{(1-\tan h)^2}\times\frac{\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2}{\left(\frac{\sin(2h)}{h}\right)}=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,

donc : $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim_{h\to 0} f\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

D'où f admet un prolongement par continuité au point $x_0=\frac{\pi}{4}$.

et son prolongement g est défini par: $\begin{cases} g(x)=f(x)\,,\ x\in D-\{0\} \\ g(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 7

Montrons que la fonction f est prolongeable par continuité au point $x_0=$

- On a : $D_f=\mathbb{R}^*$
- Calculons $\lim_{x\to 0} f(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x)=\frac{\left(\cos x-\sqrt{1+\frac{\sin x}{2}}\right)\left(\cos x+\sqrt{1+\frac{\sin x}{2}}\right)}{x\left(\cos x+\sqrt{1+\frac{\sin x}{2}}\right)}=\frac{\cos^2 x-1-\frac{\sin x}{2}}{x\left(\cos x+\sqrt{1+\frac{\sin x}{2}}\right)}$$

$$=\frac{2(\cos^2 x-1)-\sin x}{2x\left(\cos+\sqrt{1+\frac{\sin x}{2}}\right)}=\frac{-2\sin^2 x-\sin x}{2x\left(\cos x+\sqrt{1+\frac{\sin x}{2}}\right)}$$

$$=\frac{-\sin x(2\sin x+1)}{2x\left(\cos x+\sqrt{1+\frac{\sin x}{2}}\right)}=-\frac{\sin x}{x}\times\frac{2\sin x+1}{2\left(\cos x+\sqrt{1+\frac{\sin x}{2}}\right)}$$

Puisque : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+1}{2\left(\cos x+\sqrt{1+\frac{\sin x}{2}}\right)}=\frac{1}{4}$,

alors : $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{x}\times\frac{2\sin x+1}{2\left(\cos x+\sqrt{1+\frac{\sin x}{2}}\right)}\right)=-\frac{1}{4}$ donc : $\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{4}$

D'où : f est prolongeable par continuité au point $x_0=0$ et son prolongemer

g est défini par : $\begin{cases} g(x)=f(x)\ ;\ x\neq 0 \\ g(0)=-\frac{1}{4} \end{cases}$

Exercice 8

1) Soit $x\in\mathbb{R}^*$, montrons que : $f(x+\pi)=-\sin x+\pi.\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $x \in \mathbb{R}^*$ donc : $x + \pi \neq \pi$

D'où :

$$f(x+\pi) = \frac{(x+\pi).\sin(x+\pi) - \cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}{(x+\pi) - \pi} = \frac{(x+\pi).(-\sin x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$= \frac{-x\sin x - \pi\sin x + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = -\sin x - \pi.\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

2) Montrons que f est prolongeable par continuité au point $x_0 = \pi$.

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{\pi\}$,

• Calculons : $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$

On pose : $t = x - \pi$, On a : $f(x) = f(t+\pi) = -\sin t - \pi.\frac{\sin t}{t} + \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}$

Puisque : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ et $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t \to 0} \sin t = 0$

alors : $\lim\limits_{t \to 0}\left(-\sin t - \pi.\frac{\sin t}{t} + \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\right) = -\pi + \frac{1}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} f(t+\pi) = \frac{1}{2} - \pi$

D'où f est prolongeable par continuité au point $x_0 = \pi$ et son prolongement g est définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \ ; \ x \neq \pi \\ g(\pi) = \frac{1}{2} - \pi \end{cases}$

Exercice 9

1) Déterminons D

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$x \in D \Leftrightarrow \left(\pi x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\right)$ et $x - E(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \left(x \neq \frac{1}{2} + k \ ; k \in \mathbb{Z}\right)$ et $E(x) \neq x$

Puisque : $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$, alors: $x \in D \Leftrightarrow \left(x \neq \frac{1}{2} + k \ ; k \in \mathbb{Z}\right)$ et $x \notin \mathbb{Z}$

Donc : $D = \mathbb{R} - \left(\left\{\frac{1}{2} + k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \mathbb{Z}\right)$

2) Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} f(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;1[$ tel que : $x \neq \frac{1}{2}$ on a : $E(x) = 0$

Donc : $f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Calculons $\lim_{x \to 0^+} \tan(\pi x)$

On pose : $t = x - \frac{1}{2}$

On a : $\tan(\pi x) = \tan\left(\pi\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) = \tan\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\pi t)} = \frac{t}{\tan(\pi t)} \times \left(-\frac{1}{t}\right)$

Puisque : $\lim_{t \to 0^+} \frac{t}{\tan(\pi t)} = \frac{1}{\pi}$ et $\lim_{t \to 0^+}\left(-\frac{1}{t}\right) = +\infty$

alors : $\lim_{x \to 0^+} \tan(\pi x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{\tan(\pi t)} \times \left(-\frac{1}{t}\right) = +\infty$

Donc : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(\pi x)}{x} = +\infty$

3) Calculons $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; 1[$ tel que : $x \neq \frac{1}{2}$ on a : $f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x}$

Donc : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\tan(\pi x)}{x} = \pi$

• Calculons $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]-1; 0[$ on a : $E(x) = -1$

Donc : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\tan(\pi x)}{x - 1} = 0$

car : $\lim_{x \to 0^-} \tan(\pi x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^-} (x - 1) = -1$, donc : $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

D'où, la fonction f n'admet pas de limite finie au point $x_0 = 0$, par suite f n'est pas prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$.

Exercice 10

1) a) Déterminons D

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x \neq 0$ et $\sin x \neq 0$

Puisque : $\sin x = 0 \iff x = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$, alors $x \in D \iff x \neq k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

b) Étudions la parité de la fonction f

Soit $x \in D$, on a : $-x \in D$

et $f(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} - \frac{1}{-x} = \frac{-1}{\sin x} + \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$

Donc : $(\forall x \in D)$; $(-x \in D$ et $f(-x) = -f(x))$ d'où f est une fonction impaire.

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Montrons que : $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) ; 0 < f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Rappel : $\left(\forall \alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) ; 0 < \sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$

Soit $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $0 < \sin x < x \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

Donc : $f(x) > 0$ (1)

D'autre part, on a : $0 < x < \tan x \Rightarrow \frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} < -\frac{1}{\tan x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$$

Donc : $f(x) < \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$

Puisque :

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

alors : $f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (2)

d'où de (1) et (2) on conclut que : $0 < f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Par suite : $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) ; 0 < f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

3) Montrons que la fonction f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$.

On a : $\begin{cases} \left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) ; 0 < f(x) < \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \end{cases}$

Donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Calculons $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

On pose : $t = -x$, puisque la fonction f est impaire, alors

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(-t) = -\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Par suite f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 11

1) Calculons : $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{x}=\pi$ et la fonction cos est continue au point π

alors : $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)=\cos\pi=-1$

2) Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan\left(\sqrt{x}.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1$

Donc : $\sqrt{x}\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq\sqrt{x}$ c'est-à-dire : $\left|\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq\sqrt{x}$

Donc : $\begin{cases}(\forall x\in\,]0;+\infty[)\ ;\ \left|\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq\sqrt{x}\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0\end{cases}$

D'où d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Puisque la fonction tan est continue au point 0,

alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan\left(\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\tan(0)=0$

3) Calculons : $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x\right)$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $-1\leq\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1\Rightarrow x-x^2\leq x+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq x^2+x$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}x-x^2=\lim\limits_{x\to 0}x^2+x=0$

alors : $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x=0$ d'après les propriétés des limites et l'ordre.

et on a la fonction cos est continue au point 0,

alors : $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x\right)=\cos(0)=1$

4) Calculons : $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{\tan^2 x-\pi\tan x}{2x}\right)$

Soit $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $x\neq 0$, on a :

$$\frac{\tan^2 x-\pi\tan x}{2x}=\frac{\tan(x)(\tan x-\pi)}{2x}=\frac{\tan(x)}{x}\times\left(\frac{\tan x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{2}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$ alors : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-\pi\tan x}{2x}=-$

et on a la fonction sin est continue au point $-\frac{\pi}{2}$,

donc : $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{\tan^2 x-\pi\tan x}{2x}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

1) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)| < |x|$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) < 1$

Donc : $\left|\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1$ d'où : $|x|\left|\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)\right| < |x|$

c'est-à-dire $\left|1 - xE\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ donc : $|f(x)| < |x|$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)| < |x|$

• Déduction :

On a : $\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ |f(x) - 0| < |x| \\ \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 \end{cases}$

donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

d'où : $0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ signifie que f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$

et ce prolongement est défini par : $\begin{cases} g(x) = f(x)\ ;\ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

2) a) Montrons que : $(\forall x \in]0;\pi[)\ ;\ \frac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \frac{\sin x}{x}$

Soit $x \in]0;\pi[$, on a : $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

Puisque $\sin x > 0$, alors : $\frac{\sin x}{x} - \sin x < (\sin x) E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\sin x}{x}$

Donc : $(\forall x \in]0;\pi[)\ ;\ \frac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \frac{\sin x}{x}$

• Montrons que : $(\forall x \in]-\pi;0[)\ ;\ \frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x$

Soit $x \in]-\pi;0[$, on a : $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$;

Puisque $\sin x < 0$, alors : $\frac{\sin x}{x} - \sin x > (\sin x) E\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{\sin x}{x}$

Donc : $\frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x$

D'où : $(\forall x \in]-\pi;0[)\ ;\ \frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x$

b) Étudions si la fonction g admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$.

• On a : $0 \notin D_g$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• On a : $\begin{cases} (\forall x \in]0;\pi[) \ ; \ \dfrac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \dfrac{\sin x}{x} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} - \sin x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \end{cases}$

• On a : $\begin{cases} (\forall x \in]-\pi;0[) \ ; \ \dfrac{\sin x}{x} \leq g(x) < \dfrac{\sin x}{x} - \sin x \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} - \sin x = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \end{cases}$

Donc d'après les propriétés des limites et l'ordre on a : $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 1$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 1$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$;

Par suite, la fonction g admet un prolongement par continuité au point $x_0 =$

3) Étudions le prolongement par continuité de la fonction h au point $x_0 =$

• Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$

Soit x un élément de $]0;1[$, on a : $E(x) = 0$ donc : $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

• Calculons $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$

Soit x un élément de $]-1;0[$, on a : $E(x) = -1$

donc : $h(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{-x}} = -\sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(-\sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{-x}}\right) = +\infty$, par suite h n'admet pas une lim

finie au point $x_0 = 0$, donc la fonction h n'est pas prolongeable par continu

au point $x_0 = 0$

Exercice 13

1) Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow |x| - E(x) \geq 0$

Puisque : $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $-|x| \leq x \leq |x|$

alors : $E(x) \leq |x|$ c'est-à-dire : $|x| - E(x) \geq 0$

Donc : $x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ d'où : $D = \mathbb{R}$.

b) • Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a : $f(x) = \sqrt{x - E(x)} - x$

Puisque : $E(x) \leq x < E(x) + 1$ alors $0 \leq x - E(x) < 1$

Donc $0 \leq \sqrt{x - E(x)} < 1$ c'est-à-dire $-x \leq \sqrt{x - E(x)} - x < 1 - x$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où : $\begin{cases} (\forall x \in]0;+\infty[) \ ; \ f(x) < 1 - x \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty \end{cases}$

Ainsi d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Soit x un élément de $]-\infty;0[$, on a : $f(x) = \sqrt{-x - E(x)} - x$

Puisque : $x - E(x) \geq 0$ alors $-x - E(x) \geq -2x$;

Donc : $\sqrt{-x - E(x)} - x \geq \sqrt{-2x} - x$ c'est-à-dire $f(x) \geq \sqrt{-2x} - x$

D'où : $\begin{cases} (\forall x \in]-\infty;0[) \ ; \ f(x) \geq \sqrt{-2x} - x \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-2x} - x = +\infty \end{cases}$

Ainsi d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) a) Étudions la continuité de f à droite en $x_0 = k$.

Soit x un élément de $[k;k+1[$, on a : $E(x) = k$

Donc : $f(x) = \sqrt{|x| - k} - x$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ k>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{k \to 0 \\ k>0}} \sqrt{|x| - k} - x = \sqrt{|k| - k} - k$

et on a : $f(k) = \sqrt{|k| - k} - k$ donc : $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ k>0}} f(x) = f(k)$

Par suite, la fonction f est continue à droite au point $x_0 = k$.

• Étudions la continuité de f à gauche en $x_0 = k$.

x un élément de $]k-1;k[$, on a $E(x) = k-1$.

Donc : $f(x) = \sqrt{|x| - k + 1} - x$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ x<k}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to k \\ x<k}} \sqrt{|x| - k + 1} - x = \sqrt{|k| - k + 1} - k$

et puisque : $f(k) = \sqrt{|k| - k} - k$ alors $f(k) \neq \sqrt{|k| - k + 1} - k$,

donc : $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ x<k}} f(x) \neq f(k)$, ainsi la fonction f n'est pas continue à gauche au point $x_0 = k$

b) Étudions la continuité de f sur l'intervalle $]k;k+1[$.

On a : $(\forall x \in]k;k+1[) \ ; \ f(x) = \sqrt{|x| - k} - x$

La fonction : $x \longmapsto |x| - k$ est continue sur l'intervalle $]k;k+1[$ et $|x| - k \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]k;k+1[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{|x| - k}$ est continue sur l'intervalle $]k;k+1[$ et on a la fonction $x \longmapsto -x$ est continue sur l'intervalle

For more visit: L9ray.com CamScanner

$[k;k+1[$

Donc la fonction f est continue sur l'intervalle $[k;k+1[$ comme somme de deux fonctions continues sur l'intervalle $[k;k+1[$.

Exercice 14

1) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq \sqrt{x^2+(x+1)^2}$

Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a :

$$E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right)+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < 1+E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}+1$$

Donc : $\frac{1}{x^2} < \left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \leq \frac{(x+1)^2}{x^2}$

c'est-à-dire : $\frac{1+x^2}{x^2} < 1+\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \leq \frac{x^2+(1+x)^2}{x^2}$

D'où : $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} < \sqrt{1+\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+(1+x)^2}}{x}$

Ainsi : $\sqrt{1+x^2} < x\sqrt{1+\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} \leq \sqrt{x^2+(1+x)^2}$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq \sqrt{x^2+(1+x)^2}$

b) Déduction :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq \sqrt{x^2+(1+x)^2}$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{1+x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x^2+(1+x)^2} = 1$ donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

Puisque $f(0) = 1$ alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

D'où la fonction f est continue à droite au point $x_0 = 0$.

2) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

D'après la question 1) a) on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f(x) > \sqrt{1+x^2}$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) a) Montrons que : $(\forall x \in [-1;0[)$; $-\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2+(1+x)^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit x un élément de $[-1;0[$, on a :

$$E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right)+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < 1+E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1+x}{x}$$

Puisque : $\frac{1+x}{x} \leq 0$ alors : $0 \leq -\left(\frac{1+x}{x}\right) \leq -\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right) < -\frac{1}{x}$

Donc : $\frac{(1+x)^2}{x^2} \leq \left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 < \frac{1}{x^2}$

D'où : $\frac{(1+x)^2+x^2}{x^2} \leq 1+\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 < \frac{1+x^2}{x^2}$

et on a : $-1 \leq x < 0$ donc : $\frac{\sqrt{x^2+(1+x)^2}}{-x} \leq \sqrt{1+\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} < \frac{\sqrt{1+x^2}}{-x}$

D'où : $-\sqrt{1+x^2} < x\sqrt{1+\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2} \leq -\sqrt{x^2+(x+1)^2}$

c'est-à-dire : $-\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2+(x+1)^2}$

Par suite : $(\forall x \in [-1;0[)\ ;\ -\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2+(1+x)^2}$

b) Déduction :

On a : $(\forall x \in [-1;0[); -\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2+(1+x)^2}$

et $\lim\limits_{x \to 0^-}\left(-\sqrt{1+x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(-\sqrt{x^2+(1+x)^2}\right) = -1$, donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

4) Étudions la continuité de f au point $x_0 = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ et $f(0) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0)$

D'où la fonction f n'est pas continue à gauche en $x_0 = 0$, par suite la fonction f n'est pas continue au point $x_0 = 0$.

Exercice 15

1) Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x \neq 0$ et $E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \neq 0$

Puisque : $E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow E\left(\frac{2}{x}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{2}{x} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{x}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 < x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in]1;2]$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

alors : $x \in D \iff x \neq 0$ et $x \notin]1;2[$

$\iff x \in]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]2;+\infty[$

Donc : $D =]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]2;+\infty[$

2) a) Montrons que :

$$(\forall x \in D) : \frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$$

Soit $x \in D$; on a : $E\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{2}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) + 1$

donc : $\frac{2}{x} - 1 < E\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{2}{x}$ c'est-à-dire : $\frac{2}{x} - 2 < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2}{x} - 1$

D'où : $\frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$ par suite :

$$(\forall x \in D) : \frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$$

b) Déduction :

• Calculons : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Soit $x \in]0;1[$, on a : $\frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$

Puisque : $\frac{2-2x}{x} > 0$ alors : $\frac{x}{2-x} \leq \frac{1}{E\left(\frac{2}{x}\right) - 1} < \frac{x}{2-2x}$

Donc : $(\forall x \in]0;1[) : \frac{x}{2-x} \leq f(x) < \frac{x}{2-2x}$

et on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{2-x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{2-2x} = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

• Calculons : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

Soit $x \in]-\infty;0[$, on a : $\frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$

Puisque : $\frac{2-x}{x} < 0$ alors : $\frac{x}{2-x} \leq \frac{1}{E\left(\frac{2}{x}\right) - 1} < \frac{x}{2-2x}$

Donc : $(\forall x \in]-\infty;0[) ; \frac{x}{2-x} \leq f(x) < \frac{x}{2-2x}$ et on a :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{2-x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{2-2x} = 0$$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ finalement on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $0 \notin D$.

Donc la fonction f est prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 16

1) Montrons que l'équation $\sqrt{x} - x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0;1[$.

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \sqrt{x} - x^3 + 2x - 1$.

- La fonction f est continue sur $[0;1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues f_1 et f_2 sur $[0;1]$ telles que : $f_1 : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $f_2 : x \longmapsto -x^3 + 2x - 1$

(f_1 est la restriction d'une fonction polynôme sur l'intervalle $[0;1]$ et f_2 est la restriction de la fonction racine carrée sur l'intervalle $[0;1]$).

et on a : $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc $f(0) \times f(1) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins c de $]0;1[$ tel que $f(c) = 0$

d'où l'équation $\sqrt{x} - x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution c dans $]0;1[$.

2) Montrons que l'équation $\sin x = 1 - x$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$.

Soit f la fonction numérique définie sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ par : $f(x) = \sin x + x - 1$

- La fonction f est la somme des deux fonctions f_1 et f_2 telles que :

$f_1 : x \longmapsto \sin x$ et $f_2 : x \longmapsto x - 1$

Puisque f_1 est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ (restriction de sin sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$)

et f_2 est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ (restriction d'une fonction polynôme sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$)

alors f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$

- On a : $f(0) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} - 1 = \frac{\pi - 3}{6}$

Donc : $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$ (car : $\pi - 3 > 0$) et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$ tel que $f(c) = 0$.

d'où, l'équation: $\sin x = 1 - x$ admet au moins une solution c dans $\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$.

- Montrons que c est unique, pour cela, on montre que f est strictement monotone sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$.

On a : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right]\right)$; $f'(x) = \cos x + 1$, puisque $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right[\right)$; $\cos x > -1$

alors $f'(x) > 0$ pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{6}\right[$, donc f est strictement croissante sur

For more visit: L9ray.com CamScanner

$\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ d'où c est unique.

On en déduit que l'équation : $\sin x = 1 - x$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$.

3) Montrons que la courbe (C_f) de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse a telle que : $0 < a < 1$.

On a : La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse a tel que : $0 < a < 1$ signifie que : $(\exists! a \in]0;1[) ; f(a) = 0$

• On a : $f(x) = x^5 + 3x^3 + 4x - 5$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

f est continue sur l'intervalle $[0;1]$ car c'est la restriction d'une fonction polynôme sur $[0;1]$ (1)

• On a : $f(0) = -5$ et $f(1) = 3$ donc $f(0) \times f(1) < 0$ (2)

• Et on a : $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 4$ donc $(\forall x \in [0;1]) ; f'(x) > 0$

d'où f est strictement croissante sur $[0;1]$ (3)

De (1), (2) et (3), on déduit qu'il existe un réel unique a de l'intervalle $]0;1[$ tel que $f(a) = 0$, c'est-à-dire la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse a telle que $0 < a < 1$.

Exercice 17

Montrons que : $(\exists x_0 \in]0;1[) ; \alpha f(0) + \beta f(1) = (\alpha + \beta) f(x_0)$

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$h(x) = \alpha f(0) + \beta f(1) - (\alpha + \beta) f(x)$$

On a : La fonction f est continue sur l'intervalle $[0;1]$ et la fonction $x \longmapsto \alpha f(0) + \beta f(1)$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0;1]$ donc la fonction h est continue sur le segment $[0;1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur le segment $[0;1]$

$h(0) = \alpha f(0) + \beta f(1) - (\alpha + \beta) f(0) = \beta(f(1) - f(0))$

et $h(1) = \alpha f(0) + \beta f(1) - (\alpha + \beta) f(1) = -\alpha(f(1) - f(0))$

Donc : $h(0) \times h(1) = -\alpha\beta(f(1) - f(0))^2$

Puisque : $f(1) \neq f(0)$ c'est-à-dire : $f(1) - f(0) \neq 0$ et $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

alors : $-\alpha\beta(f(1) - f(0))^2 < 0$ donc : $h(0) \times h(1) < 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où : La fonction h est continue sur le segment $[0;1]$ et $h(0) \times h(1) < 0$,

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

$$(\exists x_0 \in]0;1[) ; h(x_0) = 0$$

et on a : $h(x_0) = 0 \iff \alpha f(0) + \beta f(1) - (\alpha + \beta) f(x_0) = 0$

$$\iff \alpha f(0) + \beta f(1) = (\alpha + \beta) f(x_0)$$

Donc : $(\exists x_0 \in]0;1[) ; \alpha f(0) + \beta f(1) = (\alpha + \beta) f(x_0)$

IV Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

1) Fonction réciproque:

Définition: Soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit J l'image de l'intervalle I par la fonction f.

La fonction qui associe à tout élément y de J, l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$, est appelée la fonction réciproque de f et on la note par : f^{-1}.

conséquences: Soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} est sa fonction réciproque alors :

- $\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in f(I) \end{cases}$
- $(\forall x \in I) ; (f^{-1} o f)(x) = x$
- $(\forall x \in f(I)) ; (f o f^{-1})(x) = x$

Propriété: Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $f(I)$.

2) Propriétés de la fonction réciproque:

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f^{-1} est sa fonction réciproque, alors :

- f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$.
- f^{-1} est strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ (de même monotonie que f sur I)
- Les courbes des deux fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation: $y = x$ dans un repère orthonormé.

V Fonction racine n^{ième}

1) Propriétés :

- $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
- $a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$
- $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

- $a-b=\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)(a^2+b^2)}$
- $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$
- $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a^2}+\sqrt[4]{b^2})}$

2) Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$:

- $[0;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$
  $\sqrt[n]{\ } : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$
- $(\forall y \in [0;+\infty[) ; (\forall x \in [0;+\infty[) \quad ; \quad \sqrt[n]{x}=y \Longleftrightarrow x=y^n$
- $(\forall x \in [0;+\infty[) ; (\sqrt[n]{x})^n=\sqrt[n]{x^n}=x$

VI Fonction Arctan

1) Les propriétés de la fonction $Arc\tan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \tan(Arc\tan x)=x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $Arc\tan x=y \Longleftrightarrow \tan y=x$
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\; ; \; Arc\tan(\tan x)=x$

2) Limites usuelles

- $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan x=\frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan x=-\frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arc\tan x}{x}=1$

Exercices d'application

Exercice 18

Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $]-\infty;1[$ et g u fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $]1;+\infty[$ telles que f et sont continues sur $\mathbb{R}$ et il existe deux réels x_1 et x_2 de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant : $x_1 <$ et $f(x_1)=x_1$ et $g(x_2)=x_2$. Montrer que : $(\exists x_3 \in]x_1;x_2[) ; (f\times g)(x_3)=x_3$

Exercice 19

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle $[0;1]$ telle que :

$$f(0)=f(1)$$

Montrer que : $\left(\exists c \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\right) ; f\left(c+\frac{1}{2}\right)=f(c)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 20

Soit f une fonction définie de $[0;1]$ dans $[0;1]$ et continue sur $[0;1]$.

Montrer que : $(\exists \alpha \in [0;1]) ; f(\alpha) + f(1-\alpha) = 2\alpha$

Exercice 21

Dans chacune des questions suivantes, f est une fonction numérique et g sa restriction sur l'intervalle I.

Montrer que g est bijective de I sur un intervalle J que l'on déterminera; puis déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; $I = [0;1[$;

2) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $I = [-1;1]$

3) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$; $I = [-1;+\infty[$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 3$; $I = [-1;+\infty[$

5) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sqrt{1-x} = 1 - x$

2) $x + \sqrt[3]{x} = 2$

3) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$

4) $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$

5) $\sqrt[4]{\dfrac{2-x}{3+x}} + \sqrt[4]{\dfrac{3+x}{2-x}} = 2$

6) $4x - 3\sqrt[3]{x} - 1 = 0$

Exercice 23

Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{4x+4} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{2}}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{1 - \sqrt[3]{x+1}}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$

6) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{3-x} - 1}{2 - \sqrt[3]{x+6}}$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3+1}\right)$

8) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1 + \sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{x^2-1}}$

9) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)}$

10) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$

11) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{x}$

12) $\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ x<8}} \dfrac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{x-8}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 24

Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-\sqrt[3]{1-x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-2x\right)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+2}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)\right)$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\sqrt[4]{x^4-1}\right)$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+x}\right)$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-\sqrt{x^2-1}\right)$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\right)$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cos(x)-\cos(2x)}{\sqrt[3]{x}}\right)$

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\frac{1+8x}{x^4}}}\right)$

Exercice 25

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt[3]{x(x-1)^2}-1$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f

2) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$.

a) Montrer que g est bijective de I sur un intervalle J à déterminer

b) Montrer que : $(\forall x\in[1;+\infty[)\,;\,g(x)<x$

Exercice 26

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}$.

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que f est bijective de D sur un intervalle J à déterminer.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f(x)=\sqrt[3]{2x}$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 27

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que f est continue sur D.

c) Montrer que f est bijective de D sur un intervalle J à déterminer.

2) Montrer que : $\left(\exists c \in \left]0;\frac{1}{2}\right[\right); f(c) = c^3$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = \sqrt{1-2x}$

4) Calculons $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{f(x)}{x - \frac{1}{2}}$

Exercice 28

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \cos(Arc\tan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, puis en déduire que :

$(\forall x \in \mathbb{R}); \sin(Arc\tan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer en fonction de x :

$$\sin(2Arc\tan x) \text{ et } \cos^2\left(\frac{1}{2}Arc\tan x\right)$$

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \cos^2\left(\frac{1}{2}Arc\tan(x) + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1+x\sqrt{3}}{4\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 29

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A(x) = \tan(2Arc\tan x)$ 2) $B(x) = \cos(4Arc\tan x)$

3) $C(x) = \cos(6Arc\tan x)$ 4) $D(x) = \sin(3Arc\tan x)$

Vous pouvez utiliser les formules suivantes, pour tout α de $\mathbb{R}$:

- $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
- $\sin(3\alpha) = \sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

Exercice 30

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} Arc\tan\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ 2) $\lim\limits_{x \to 2^+}(x-2)Arc\tan\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{Arc\tan(5x^2+x+1)}{x}$ 4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} Arc\tan(\tan x)$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} Arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+4}-3}\right)$ 6) $\lim\limits_{x \to -\infty} Arc\tan\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 18

Montrons que : $(\exists x_3 \in]x_1;x_2[) ; (f \times g)(x_3) = x_3$

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (f \times g)(x) - x$;

• On a : La fonction $f \times g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \longmapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.

• On a : $f(x_1) = x_1$ et $h(x_1) = (f \times g)(x_1) - x_1 = f(x_1)g(x_1) - x_1$

donc : $h(x_1) = x_1(g(x_1) - 1)$

et on a : $g(x_1) = x_1$ et $h(x_2) = (f \times g)(x_2) - x_2 = f(x_2)g(x_2) - x_2$

donc: $h(x_2) = x_2(f(x_2) - 1)$

Puisque : $g : \mathbb{R} \longrightarrow]1;+\infty[$ alors $g(x_1) > 1$ c'est-à-dire $g(x_1) - 1 > 0$

et on a : $x_1 > 0$ donc $x_1(g(x_1) - 1) > 0$ c'est-à-dire $h(x_1) > 0$

Puisque : $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-\infty;1[$ alors $f(x_2) < 1$ c'est-à-dire $f(x_2) - 1 < 0$

et on a : $x_2 > 0$ donc $x_2(f(x_2) - 1) < 0$ c'est-à-dire $h(x_2) < 0$

donc $h(x_1) \times h(x_2) < 0$, par suite la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur le segment $[x_1;x_2]$ et $h(x_1) \times h(x_2) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $(\exists x_3 \in]x_1;x_2[) ; h(x_3) = 0$

c'est-à-dire : $(\exists x_3 \in]x_1;x_2[) ; (f \times g)(x_3) = x_3$.

Exercice 19

Montrons que : $\left(\exists c \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\right) ; f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par :

$$h(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

La fonction : $u : x \longrightarrow x + \frac{1}{2}$ est continue sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et $u\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right) \subset [0;$

et la fonction f est continue sur l'intervalle $[0;1]$ donc la fonction $x \longmapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right) = (fou)(x)$ est continue sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

D'où la fonction h est continue sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ car c'est la somme de

For more visit: L9ray.com CamScanner

deux fonctions continues sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

D'autre part, on a : $h(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)$

et $h\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)$ et puisque $f(1)=f(0)$

alors $h\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)=-\left(f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=-h(0)$

donc : $h(0)\times h\left(\frac{1}{2}\right)=-(h(0))^2$

- Si $h(0)=0$ alors $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire $c=0$
- Si $h(0)\neq 0$ alors on a h est continue sur le segment $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et $h(0)\times h\left(\frac{1}{2}\right)<0$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

$$\left(\exists c\in\left]0;\frac{1}{2}\right[\right);h(c)=0$$

D'où $\left(\exists c\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right);f\left(c+\frac{1}{2}\right)=f(c)$

Exercice 20

Montrons que : $(\exists\alpha\in[0;1]);f(\alpha)+f(1-\alpha)=2\alpha$

On considère la fonction numérique h définie sur $[0;1]$ par :

$$h(x)=f(x)+f(1-x)-2x$$

- Étudions la continuité de h sur le segment $[0;1]$

La fonction : $u:x\longmapsto 1-x$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme et en particulier sur $[0;1]$ $u([0;1])\subset[0;1]$ et la fonction f est continue sur $[0;1]$ donc la fonction : $x\longmapsto f(1-x)=(fou)(x)$ est continue sur $[0;1]$,

et on a la fonction : $x\longmapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0;1]$ donc h est continue sur $[0;1]$

On a : $h(0)=f(0)+f(1)$ et $h(1)=f(1)+f(0)-2$ et puisque la fonction f est définie de $[0;1]$ dans $[0;1]$ alors : $f(0)\in[0;1]$ et $f(1)\in[0;1]$ c'est à dire $0\leq f(1)\leq 1$ et $0\leq f(0)\leq 1$

donc : $0\leq f(0)+f(1)\leq 2$ d'où $f(0)+f(1)-2\leq 0$ et $f(0)+f(1)\geqslant 0$

c'est-à-dire : $h(1)\leq 0$ et $h(0)\geqslant 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Si $h(0) = 0$ alors $f(0) + f(1) = 2$ donc $\alpha = 0$

• Si $h(1) = 0$ alors $f(1) + f(0) = 2$ donc $\alpha = 1$

• Si $h(1) < 0$ et $h(0) > 0$ alors $h(1) \times h(0) < 0$, donc on a :

h est continue sur $[0;1]$ et $h(1) \times h(0) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $(\exists \alpha \in]0;1[) ; h(\alpha) = 0$

c'est-à-dire : $(\exists \alpha \in]0;1[) ; f(\alpha) + f(1-\alpha) - 2\alpha = 0$

D'où : $(\exists \alpha \in [0;1]) ; f(\alpha) + f(1-\alpha) = 2\alpha$

Exercice 21

1) On a : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ et g est la restriction de f sur I

•La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$, $\left(Car : g'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)$ donc g est bijective de I sur l'intervalle $J = g(I) =]-\infty; -1]$

• Déterminons $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Soit x un élément de $]-\infty; -1]$.

On pose : $y = g^{-1}(x)$ où $y \in I$.

On a : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2+1}{y^2-1} = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 1 = xy^2 - x$$

$$\Leftrightarrow (x-1)y^2 = 1 + x$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1+x}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad (\text{car } y \geq 0)$$

Donc : $g^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ pour tout x de $]-\infty; -1]$.

2) On a : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ et g est la restriction de f sur l'intervalle $[1; -1]$.

• La fonction g est continue et strictement croissante sur I (vérifier le) donc g est bijective de I vers I

For more visit: L9ray.com CamScanner

• On a : $x = 0 \Longleftrightarrow y = 0$

• Si : $x \neq 0$ alors l'équation: $\frac{2y}{1+y^2} = x$, où y est l'inconnue admet deux solutions $y_1 = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ et $y_2 = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, et puisque $y_2 > 1$ pour $-1 < x < 1$ alors $g^{-1}(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ *pour* $x \neq 0$ et $g^{-1}(0) = 0$

Donc: $g^{-1}(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ pour tout x de l'intervalle $[-1;1]$.

3) On a : $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$ et g est la restriction de f sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$.

Vérifier les résultats suivants :

• La fonction g est bijective de I sur l'intervalle $J = I$. (g est continue et strictement croissante sur I).

• $g^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{(x+1)^2}$ pour tout x de l'intervalle $[-1; +\infty[$.

4) On a : $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 3$ et g est la restriction de f sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$

Puisque l'ensemble de définition de f est I alors $f = g$

- Montrons que f est une bijection:

• Étudions la continuité de f sur I.

- La fonction : $u : x \longmapsto x+1$ est continue et positive sur I (fonction affine).

- La fonction : $v : x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $u(I)$ (car $u(I) \subset \mathbb{R}^+$)

Donc le fonction : $vou : x \longmapsto \sqrt[3]{x+1}$ est continue sur I.

Puisque la fonction : $w : x \longmapsto -3$ est continue sur I alors la fonction $f = vou + w$ est continue sur l'intervalle de I.

• Étudions la monotonie de f sur l'intervalle I :

Soit x_1 et x_2 deux éléments de I tels que : $x_1 < x_2$.

Comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$:

On a : $-1 \leq x_1 < x_2$ donc : $0 \leq x_1 + 1 < x_2 + 1$

d'où: $\sqrt[3]{x_1+1} < \sqrt[3]{x_2+1}$ (car la fonction: $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante $\mathbb{R}^+$).

Ainsi : $\sqrt[3]{x_1+1} - 3 < \sqrt[3]{x_2+1} - 3$

c'est-à-dire : $f(x_1) < f(x_2)$ et par suite, f est strictement croissante sur l'intervalle I

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I, donc f réalise une bijection de I vers l'intervalle $J = [-3; +\infty[$.

- Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de $[-3; +\infty[$

Soit x de $[-3; +\infty[$ et y de $[-1; +\infty[$ tels que $f^{-1}(x) = y$:

On a : $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$\iff \sqrt{y+1} - 3 = x$

$\iff \sqrt{y+1} = x + 3$

$\iff y + 1 = (x+3)^2$

$\iff y = -1 + (x+3)^2$

Donc : $f^{-1}(x) = -1 + (x+3)^2$ pour tout x de $[-3; +\infty[$.

5) On a : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ et g est la restriction de f sur $I = \mathbb{R}$, donc on a : $f = g$.

- Montrons que f est une bijection

• On a :

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme).

- La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(car : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$

donc f est une bijection de I sur l'intervalle $J = \mathbb{R} = I$

- Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que : $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$\iff y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = x$

$\iff (y-1)^3 = x$

Puisque $y-1$ et $(y-1)^3$ ont le même signe alors x et $y-1$ ont le même si

• donc : si $x \geq 0$ alors $y - 1 \geq 0$ donc : $(y-1)^3 = x \iff y - 1 = \sqrt[3]{x}$

$\iff y = 1 + \sqrt[3]{x}$

• Si $x < 0$ alors $y - 1 < 0$, donc :

$(y-1)^3 = x \iff -(y-1)^3 = -x$

$\iff -(y-1) = \sqrt[3]{-x}$

$\iff y = 1 - \sqrt[3]{-x}$

Donc : $\begin{cases} f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x} & ; x \geq 0 \\ f^{-1}(x) = 1 - \sqrt[3]{-x} & ; x < 0 \end{cases}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 22

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1): $\sqrt[4]{1-x} = 1-x$

L'équation (E_1) est définie sur l'intervalle $]-\infty; 1]$

Soit x un élément de $]-\infty; 1]$, on pose : $X = \sqrt[4]{1-x}$

On a : $X = X^4 \iff X(X^3-1) = 0$

$\iff X(X-1)(X^2+X+1) = 0$

$\iff X = 0$ *ou* $X = 1$

Donc : $\sqrt[4]{1-x} = 1-x \iff \sqrt[4]{1-x} = 0$ ou $\sqrt[4]{1-x} = 1$

$\iff x = 1$ ou $x = 0$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $S = \{0; 1\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_2): $x + \sqrt[3]{x} = 2$

L'équation (E_2) est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Soit x un élément de $[0; +\infty[$, on pose : $X = \sqrt[3]{x}$ c'est-à-dire : $x = X^3$

On a : $X^3 + X = 2 \iff X^3 + X - 2 = 0$

$\iff X^3 - 1 + (X-1) = 0$

$\iff (X-1)(X^2+X+1) + (X-1) = 0$

$\iff (X-1)(X^2+X+2) = 0$

$\iff X = 1$ ou $X^2+X+2 = 0$

Puisque le discriminant du trinôme X^2+X+2 est -3

alors: $X^2 + X + 2 \neq 0$;

Donc : $x + \sqrt[3]{x} = 2 \iff \sqrt[3]{x} = 1$

$\iff x = 1$

D'où: l'ensemble de solution de l'équation (E_2) et : $S = \{1\}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_3): $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$

L'équation (E_3) est définie sur $[0; +\infty[$.

Soit x un élément de $[0; +\infty[$, on a :

$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^3} + \sqrt[6]{x^2} = (\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^2$

On pose : $X = \sqrt[6]{x}$, donc :

$X^3 + X^2 = 12 \iff X^3 - 8 + X^2 - 4 = 0$

$\iff (X-2)(X^2+2X+4) + (X-2)(X+2) = 0$

$\iff (X-2)(X^2+3X+6) = 0$

$\iff X = 2$ ou $X^2+3X+6 = 0$

Puisque le discriminant du trinôme X^2+3X+6 est le nombre -15, alors

For more visit: L9ray.com CamScanner

$X^2 + 3X + 6 \neq 0$

Donc : $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12 \iff \sqrt[6]{x} = 2 \iff x = 2^6 = 64$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est : $S = \{64\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_4): $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$

Soit D l'ensemble de définition de l'équation (E_4)

$x \in D \iff x \in \mathbb{R}$ et $28 - x \geq 0$ et $x + 7 \geq 0$

$\iff x \in \mathbb{R}$ et $x \geq -7$ et $x \leq 28$

$\iff x \in [-7; 28]$

Donc : $D = [-7; 28]$

Soit x un élément de $[-7; 28]$, on a :

$(E_4) \iff (\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x})^3 = 5^3$

$\iff x + 7 + 28 - x + 3\sqrt[3]{x+7}.\sqrt[3]{28-x}.(\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x}) = 125$

$\Rightarrow 35 + 15\sqrt[3]{(x+7)(28-x)} = 125$

$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+7)(28-x)} = 6$

$\Rightarrow (x+7)(28-x) = 6^3 = 216$

$\Rightarrow x^2 - 21x + 20 = 0$

$\Rightarrow x = 1$ ou $x = 20$

Réciproquement si: $x = 1$ ou $x = 20$, alors $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$

Donc: l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est : $S = \{1; 20\}$

5)Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation: (E_5): $\sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}} + \sqrt[4]{\frac{3+x}{2-x}} = 2$

l'équation (E_5) est définie sur l'intervalle $]-3; 2[$

Soit x un élément de $]-3; 2[$, on pose : $X = \sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}}$

On a : $\sqrt[4]{\frac{3+x}{2-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}}} = \frac{1}{X}$, donc l'équation (E_5) devient $X + \frac{1}{X} = 2$

c'est-à-dire : $X^2 - 2X + 1 = 0$, donc: $X = 1$

Ainsi : $(E_5) \iff \sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}} = 1$

$\iff \frac{2-x}{3+x} = 1$

$\iff x = -\frac{1}{2}$

Par suite, l'ensemble des solutions de l'équation (E_5) est : $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équations (E_6): $4x - 3\sqrt[3]{x} - 1 = 0$

Soit x un élément de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$4x-3\sqrt[3]{x}-1=4(\sqrt[3]{x})^3-3\sqrt[3]{x}-1$$
$$=4(\sqrt[3]{x})^3-4-3\sqrt[3]{x}+3=4\left((\sqrt[3]{x})^3-1\right)-3(\sqrt[3]{x}-1)$$
$$=4(\sqrt[3]{x}-1)\left((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1\right)-3(\sqrt[3]{x}-1)$$
$$=4(\sqrt[3]{x}-1)\left((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{4}\right)=4(\sqrt[3]{x}-1)\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2}\right)^2$$

Donc : $(E_6)\iff 4(\sqrt[3]{x}-1)\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2}\right)^2=0\iff \sqrt[3]{x}=1\iff x=1$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E_6) est $\{1\}$

Remarque: On peut poser $X=\sqrt[3]{x}$

L'équation (E_6) devient $4X^3-3X-1=0$

C'est-à-dire $(X-1)(4X^2+X+1)=0$ d'ou $X=1$ ainsi $\sqrt[3]{x}=1$ d'où: $x=1$

Exercice 23

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x}$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty;0[$ on a :

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{x}{x}=-\sqrt{\frac{x^2}{-x^3}}-1=-\sqrt[3]{-\frac{1}{x}}-1$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt[3]{-\frac{1}{x}}\right)=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt[3]{-\frac{1}{x}}-1\right)=-\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{4x+4}-2}{\sqrt[3]{x}-1}$

Soit x un élément de l'intervalle $[0;+\infty[$ et $x\neq 1$, on a :

$$\sqrt[3]{4x+4}-2=\frac{\left(\sqrt[3]{4x+4}\right)^3-(2)^3}{\left(\sqrt[3]{4x+4}\right)^2+2\sqrt[3]{4x+4}+(2)^2}=\frac{4(x-1)}{\left(\sqrt[3]{4x+4}\right)^2+2\sqrt[3]{4x+4}+4}$$

et $\sqrt[3]{x}-1=\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-(1)^3}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{4x+4}-2}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4(x-1)}{\left(\sqrt[3]{4x+4}\right)^2+2\sqrt[3]{4x+4}+4}\times\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{4x+4}\right)^2+2\sqrt[3]{4x+4}+4}=\frac{12}{12}=1$$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$

Soit x un élément de l'intervalle $[0;+\infty[$ et $x\neq 2$ on a :

$$\sqrt{x}-\sqrt{2}=\frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et $\sqrt{x}-\sqrt{2}=\dfrac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{x})^2+\sqrt{2}\sqrt{x}+(\sqrt{2})^2}=\dfrac{x-2}{(\sqrt{x})^2+\sqrt{2}\sqrt{x}+(\sqrt{2})^2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(\sqrt{x})^2+\sqrt{2}\sqrt{x}+(\sqrt{2})^2}\times\dfrac{x-2}{x-2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(\sqrt{x})^2+\sqrt{2}\sqrt{x}+(\sqrt{2})^2}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{16}}{2\sqrt{8}}=\dots$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{1-\sqrt{x+1}}$

Soit x un élément de l'intervalle $]-1;+\infty[$ et $x\neq 0$

$\sqrt[3]{x+1}-1=\dfrac{x+1-1}{\sqrt[3]{x+1}+1}=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}+1}$ et

$1-\sqrt{x+1}=\dfrac{(1)^2-(\sqrt{x+1})^2}{1+\sqrt{x+1}+(\sqrt{x+1})^2}=\dfrac{-x}{1+\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1})^2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{1-\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}\times\dfrac{1+\sqrt[3]{x+1}+(\sqrt[3]{x+1})^2}{-x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\left(1+\sqrt[3]{x+1}+(\sqrt[3]{x+1})^2\right)}{\sqrt{x+1}+1}=-\dfrac{3}{2}$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x}$

Soit x un élément de l'intervalle $[-1;+\infty[$ et $x\neq 0$, on a :

$\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x}=\dfrac{(\sqrt[3]{x+1}-1)-(\sqrt{x+1}-1)}{x}=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}-\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Puisque $\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\dfrac{(\sqrt[3]{x+1})^3-(1)^3}{x\left((\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$

$=\dfrac{x}{x\left((\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\dfrac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}}$

et $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

alors :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}-\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3-x}-1}{2-\sqrt[3]{x+6}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit x un élément de l'intervalle $[-6;3]$ et $x \neq 2$, on a :

$$\sqrt[3]{3-x}-1=\frac{\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^3-(1)^3}{\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2+\sqrt[3]{3-x}+1}=\frac{-(x-2)}{\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2+\sqrt[3]{3-x}+1}$$

$$\text{et } 2-\sqrt[3]{x+6}=\frac{(2)^3-\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^3}{(2)^2+2\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2}=\frac{-(x-2)}{4+2\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2}$$

Donc:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3-x}-1}{2-\sqrt[3]{x+6}}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{-(x-2)}{\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2+\sqrt[3]{3-x}+1}\times\frac{4+2\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2}{-(x-2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4+2\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2+\sqrt[3]{3-x}+1}=\frac{3\times 4}{3}=4$$

7) Calculons $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle de l'intervalle $[-1;+\infty[$ et $x \neq 1$, on a :

$$\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}=\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2}\times\sqrt[3]{x^3+1}+\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2}$$

$$=\frac{x^2-1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2}\times\sqrt[3]{x^3+1}+\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2}$$

Donc:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^2-1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2}\times\sqrt[3]{x^3+1}+\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2}\times\sqrt[3]{x^3+1}+\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2}=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$$

8) Calculons $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x}-1+\sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{x^2-1}}$

Soit x un élément de $]1;+\infty[$, on a :

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1+\sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}+\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\times\left(\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}+\sqrt{x-1}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\times\left(\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}+\sqrt{x-1}\right)$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-1}}{x+1}\left(\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}+\sqrt{x-1}\right)=\frac{0}{2}\times\left(\frac{1}{3}+0\right)=0$$

9) Calculons $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;2[$ et $x\neq 1$

$$\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}=(\sqrt{x+3}-2)-(\sqrt[3]{3x+5}-2)$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{3(x-1)}{(\sqrt[3]{3x+5})^2+2\sqrt[3]{3x+5}+4}$$

$$=(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{3}{(\sqrt[3]{3x+5})^2+2\sqrt[3]{3x+5}+4}\right)$$

$$\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}=\frac{x-1}{1-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{3}{(\sqrt[3]{3x+5})^2+2\sqrt[3]{3x+5}+4}\right)$$

Donc : $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}-\dfrac{3}{(\sqrt[3]{3x+5})^2+2\sqrt[3]{3x+5}+4}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{3\times 4}=0$

- Calculons $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$

Puisque la fonction : $u:x\longmapsto\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ est dérivable au point 1 alors :

$$\lim_{x\to 1}\frac{u(x)-u(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1}{x-1}=u'(1)=\frac{\pi}{4}\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$$

Donc : $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}=-\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1}=-\dfrac{2}{\pi}$

D'où : $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}=\left(-\dfrac{2}{\pi}\right)\times 0=0$

10) Calculons $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$

Soit x un élément de l'intervalle $[0;+\infty[$ et $x\neq 1$, on a :

$$\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}=\frac{1+\sqrt{x}}{2(1-x)}-\frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}{3(1-x)}$$

$$=\frac{3+3\sqrt{x}-2(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}-2}{6(1-x)}=\frac{2(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}-1}{6(x-1)}=\frac{2(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}-4-3\sqrt{x}+3}{6(x-1)}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Puisque:

$$2(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}-4=2((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}-2)=2(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+2)=\frac{2(x-1)(\sqrt[3]{x}+2)}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}$$

et $-3\sqrt{x}+3=-3(\sqrt{x}-1)=\dfrac{-3(x-1)}{\sqrt{x}+1}$

Alors : $2(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}-1=(x-1)\left(\dfrac{2(\sqrt[3]{x}+2)}{(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}+1}-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\right)$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2(\sqrt[3]{x}+2)}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\right)$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{6}{3}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{12}$$

11) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{x}$

Soit x un élément de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $x\neq 0$, on a :

$$\frac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{x}=\frac{(\cos x)^3-\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)^3}{x\left((\cos x)^2+\cos x.\sqrt[3]{\cos x}+\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)^2\right)}$$

$$=\frac{\cos^3 x-\cos x}{x\left(\cos^2 x+\cos x.\sqrt[3]{\cos x}+\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)^2\right)}$$

$$=\frac{\cos^2 x-1}{x}\times\frac{\cos x}{\cos^2 x+\cos x.\sqrt[3]{\cos x}+\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)^2}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\cos^2 x+\cos x.\sqrt[3]{\cos x}+\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$

et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\times(-x(1+\cos x))=\dfrac{1}{2}\times 0=0$

alors: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{x}=\dfrac{1}{3}\times 0=0$

12) Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x<8}}\dfrac{\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{x-8}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;8[$, on a :

$$\frac{\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{x-8}=\frac{\left(4-\sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-(2)^3}=\frac{\left(4-\sqrt[3]{x^2}\right)\sqrt{4-\sqrt[3]{x^2}}}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right)}$$

$$=\frac{-\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-(2)^2\right)\sqrt{4-\sqrt[3]{x^2}}}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right)}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$= \frac{-(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)\sqrt{4-\sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt{x}-2)\left((\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}+4\right)}$$

$$= \frac{-(\sqrt{x}+2)\sqrt{4-\sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}+4}$$

Donc: $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x\neq 8}} \frac{(4-\sqrt[3]{x^2})}{x-8} = \lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x\neq 8}} \frac{-(\sqrt{x}+2)\sqrt{4-\sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}+4} = 0$

Exercice 24

1) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty;0[$, on a :

$$\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{x}{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = 1-\sqrt[3]{\frac{x^2}{-x^3}} = 1-\sqrt[3]{-\frac{1}{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{-\frac{1}{x}}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\sqrt[3]{-\frac{1}{x}} = 1$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{x-1}$

Soit x un élément de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a :

$$x-\sqrt[3]{x-1} = x-\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = x-x\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = x\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=0$

Donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\right) = +\infty$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-\sqrt[3]{1-x}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty;0[$, on a : $x=-(-x)=-\sqrt[3]{-x^3}$

Donc : $x^2+x-\sqrt[3]{1-x} = x\left(x+1+\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{-x^3}}\right) = x\left(x+1+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}\right)$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}=0$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x-\sqrt[3]{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(x+1+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}\right) = +\infty$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)+\sqrt[3]{x}=+\infty$

5) Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x=\frac{x^3+1}{\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}\right)^2+x.\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}+x^2}$$

$$=\frac{x^3+1}{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+x^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+x^2}$$

$$=\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+1\right]}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+1}$$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^3}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+1}=\frac{1}{3}$

6) Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-2x\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-2x=\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}-2x$$

$$=x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-2x=x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-2\right)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-2\right)=-\infty$

7) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}.\left(x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}-1\right)=x^{\frac{1}{2}}.\left(x^{-\frac{11}{6}}-1\right)$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\frac{11}{6}}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{-\frac{11}{6}}-1\right)=-1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et on a : $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}(x^{-\frac{1}{2}} - 1) = -\infty$, d'où : $\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}) = -\infty$

8) Calculons $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{4}} + 2}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} - 2 = x^{\frac{1}{2}}.(1 - x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}) = x^{\frac{1}{2}}.(1 - x^{-\frac{1}{6}} - 2x^{-\frac{1}{2}})$

et $x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{4}} + 2 = x^{\frac{1}{2}}.(1 - 3x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}) = x^{\frac{1}{2}}.(1 - 3x^{-\frac{1}{4}} + 2x^{-\frac{1}{2}})$

Donc : $\frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{4}} + 2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}.(1 - x^{-\frac{1}{6}} - 2x^{-\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}.(1 - 3x^{-\frac{1}{4}} + 2x^{-\frac{1}{2}})}$

$= x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}.\left(\frac{1 - x^{-\frac{1}{6}} - 2x^{-\frac{1}{2}}}{1 - 3x^{-\frac{1}{4}} + 2x^{-\frac{1}{2}}}\right)$

$= x^{0}.\left(\frac{1 - x^{-\frac{1}{6}} - 2x^{-\frac{1}{2}}}{1 - 3x^{-\frac{1}{4}} + 2x^{-\frac{1}{2}}}\right)$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{6}} = \lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{4}} = \lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{3}} = 0$

alors: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^{-\frac{1}{6}} - 2x^{-\frac{1}{2}}}{1 - 3x^{-\frac{1}{4}} + 2x^{-\frac{1}{2}}} = 1$, et on a : $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{15}} = +\infty$

Donc: $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{15}}.\left(\frac{1 - x^{-\frac{1}{6}} - 2x^{-\frac{1}{2}}}{1 - 3x^{-\frac{1}{4}} + 2x^{-\frac{1}{2}}}\right) = +\infty$, d'où : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2} = +\infty$

9) Calculons $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{2}}.(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]1; +\infty[$ on a :

$x^{\frac{1}{2}}.(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}) = \sqrt[3]{x^2}.(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})$

$= \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$

$= \frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+x^2}.\sqrt[3]{x^3-x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2}$

$= \frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}.\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)} + \left(\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)^2}$

$= \frac{2x^2}{x^2.\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}.\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} + \left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2\right]}$

$= \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}.\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} + \left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ alors $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt{1+\frac{1}{x}}.\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{2}{3}$

D'où : $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}.\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)=\frac{2}{3}$

10) Calculons $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x^3}-\sqrt{x^4-1}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty;-1[$, on a :

$$\sqrt{1-x^3}-\sqrt{x^4-1}=\left(\sqrt{1-x^3}-(-x)\right)-\left(\sqrt{x^4-1}-(-x)\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1-x^3}\right)^3-(-x)^3}{\left(\sqrt{1-x^3}\right)^2-x.\sqrt{1-x^3}+x^2}-\frac{\left(\sqrt{x^4-1}\right)^4-(-x)^4}{\left(\sqrt{x^4-1}-x\right)\left(\left(\sqrt{x^4-1}\right)^2+x^2\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{1-x^3}\right)^2-x.\sqrt{1-x^3}+x^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x^4-1}-x\right)\left(\left(\sqrt{x^4-1}\right)^2+x^2\right)}$$

Puisque $\lim_{x\to-\infty}1-x^3=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}x^4-1=+\infty$ alors :

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x^3}=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^4-1}=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x^3}\right)^2-x.\sqrt{1-x^3}+x^2=+\infty$

et $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4-1}-x\right)\left(\left(\sqrt{x^4-1}\right)^2+x^2\right)=+\infty$

D'où :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x^3}-\sqrt{x^4-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1-x^3}\right)^2-x.\sqrt{1-x^3}+x^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x^4-1}-x\right)\left(\left(\sqrt{x^4-1}\right)^2+x^2\right)}=0$$

11) Calculons $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x^2.\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^3.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=0$ alors $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=0$

et on a : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

donc : $\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)=+\infty$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-x}=+\infty$

12) Calculons : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-\sqrt{x^2-1}\right)$

Soit x un élément de $]1;+\infty[$, on a:

$$\sqrt[3]{x^3-x^2}-\sqrt{x^2-1}=\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)-\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$=\frac{-x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=\frac{-x^2}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1\right]}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$ alors $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=1$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}=-\frac{1}{3}$

et on a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}=-\frac{1}{3}$

D'où : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-x^2}-\sqrt{x^2-1}=-\frac{1}{3}$

13) Calculons: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x+1}=\frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^4-\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x+1}\right)\left(\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^2\right)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt[4]{x}.\left(1+\sqrt[4]{\frac{x+1}{x}}\right).\left(\sqrt[4]{x}\right)^2.\left(1+\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x}}\right)^2\right)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt[4]{x^3}.\left(1+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)^2\right)}$$

et $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}.\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2 + \sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right]}$$

Donc : $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x}} = \dfrac{-\sqrt[3]{x^2}\left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2 + \sqrt[4]{1+\frac{1}{x}} + 1\right]}{\sqrt{x^3}\left(1+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)^2\right)}$

$$= -\frac{1}{\sqrt[12]{x}} \cdot \left[\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2 + \sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}{\left(1+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)^2\right)}\right]$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}} = 1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2 + \sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}{\left(1+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)^2\right)} = \frac{3}{4}$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{\sqrt[12]{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x}} = 0$

14) Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x+1}}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$ on a :

$$\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x+1}} = \frac{\sqrt[12]{(x+1)^3}-\sqrt[12]{x^4}}{\sqrt[12]{x^3}-\sqrt[12]{(x+1)^4}}$$

$$= \frac{\sqrt[12]{x^4}\cdot\left(\sqrt[12]{\frac{(x+1)^3}{x^4}}-1\right)}{\sqrt[12]{(x+1)^4}\cdot\left(\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}}-1\right)}$$

$$= \sqrt[12]{\left(\frac{x}{x+1}\right)^4}\cdot\frac{\sqrt[12]{\frac{(x+1)^3}{x^4}}-1}{\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}}-1}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{\sqrt[12]{\frac{(x+1)^3}{x^4}}-1}{\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}}-1}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} = 1$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\frac{(x+1)^3}{x^4}} = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où : $\lim \sqrt{\frac{x}{x+1}} \dfrac{\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2}} - 1}{\sqrt{\frac{x}{(x+1)^2}} - 1} = 1$, ainsi : $\lim \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} = 1$

15) Calculons $\lim \left(\frac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sqrt{x}} \right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$ on a : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

et $-1 \leq -\cos(2x) \leq 1$

D'où : $-2 \leq \cos(x) - \cos(2x) \leq 2$ c'est-à-dire : $|\cos(x) - \cos(2x)| \leq 2$

$(\forall x \in]0; +\infty[)$: $\left| \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$

et puisque $\lim \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ alors $\lim \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sqrt{x}} = 0$

16) Calculons $\lim \left(\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1+8x}{x^4}}} \right)$

On pose: $t = \frac{1}{x}$

Donc : $\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1+8x}{x^4}}} = \frac{\tan(t)}{\sqrt{t^4 + 8t^3}} = \frac{\tan(t)}{\sqrt{t^3(t+8)}} = \frac{\tan(t)}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t+8}}$

Puisque : $\lim_{t \to 0^+} \frac{\tan(t)}{t} = 1$ et $\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t+8}} = \frac{1}{2}$

alors : $\lim_{t \to 0^+} \frac{\tan(t)}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t+8}} = \frac{1}{2}$ donc : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1+8x}{x^4}}} = \frac{1}{2}$

Exercice 25

1) Déterminons D

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x(x-1)^2 \geq 0$

$\iff x \geq 0$ ou $x = 1$

$\iff x \geq 0$

Donc : $D = [0; +\infty[$

2) a) Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x \to +\infty} x(x-1)^2 = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$ donc : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

D'où : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - 1 = +\infty$

For more visit: L9ray.com
CamScanner

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}-1}{x}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x}-\frac{1}{x}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{x(x-1)^2}{x^3}}-\frac{1}{x}=\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}-\frac{1}{x}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2=1$ et la fonction : $x\mapsto\sqrt[3]{x}$

est continue en 1 alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}-\dfrac{1}{x}=1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

c) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f(x)-x=\sqrt[3]{x(x-1)^2}-1-x$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)^3-x^3}{\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)^2+x.\sqrt[3]{x(x-1)^2}+x^2}-1$$

$$=\frac{x(x-1)^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)^2+x.\sqrt[3]{x(x-1)^2}+x^2}-1$$

$$=\frac{-2x^2+x}{\left(\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}\right)^2+x.\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+x^2}-1$$

$$=\frac{x^2\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{x^2.\left[\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}\right)^2+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+1\right]}-1$$

$$=\frac{-2+\frac{1}{x}}{\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}\right)^2+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+1}-1$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2+\frac{1}{x}}{\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}\right)^2+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+1}-1=-\dfrac{2}{3}-1=\dfrac{-5}{3}$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\dfrac{-5}{3}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) a) Montrons que g est bijecti

• Étudions la continuité de g sur l'intervalle $[1; +\infty[$

La fonction : $u: x \mapsto x(x-1)^2$ est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[1; +\infty[$ et $u(x) \geq 0$ pour tout x de $[1; +\infty[$ c'est-à-dire : $u([1; +\infty[) \subset \mathbb{R}^+$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur $[1; +\infty[$

D'où la fonction g est continue $[1; +\infty[$

• Étudions la monotonie de g sur $[1; +\infty[$

Soit x et y de l'intervalle $[1; +\infty[$ tels que $x < y$

La fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$$\text{Donc : } 1 < x < y \Longrightarrow \begin{cases} x < y \\ 0 \leq x-1 < y-1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x < y \\ (x-1)^2 < (y-1)^2 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow 0 \leq x(x-1)^2 < y(y-1)^2$$

d'où : $\sqrt[3]{x(x-1)^2} < \sqrt[3]{y(y-1)^2}$ c'est-à-dire : $g(x) < g(y)$

Ainsi : $(\forall x ; y \in [1; +\infty[) ; x < y \Longrightarrow g(x) < g(y)$, par suite la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

On a donc g est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$

donc g est une bijection de $[1; +\infty[$ vers l'intervalle J tel que :

$J = g([1; +\infty[) = \left[g(1); \lim_{x \to +\infty} g(x)\right[= [-1; +\infty[$

b) Montrons que : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; g(x) < x$

Soit x un élément de l'intervalle $[1; +\infty[$, on a :

$$x < x+1 \text{ et } 0 \leq x-1 < x+1$$

donc : $x < x+1$ et $(x-1)^2 < (x+1)^2$ d'où : $0 \leq x(x-1)^2 < (x+1)^3$

Puisque la fonction : $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ alors

$\sqrt[3]{x(x-1)^2} < \sqrt[3]{(x+1)^3}$ c'est-à-dire : $\sqrt[3]{x(x-1)^2} < x+1$

donc : $\sqrt{x(x-1)^2} - 1 < x$

D'où : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; g(x) < x$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 26

1) a) Déterminons D :

Soit x un nombre réel, on a :

$x \in D \iff x+2 \geq 0$ et $2-x \geq 0$

$\iff x \geq -2$ et $x \leq 2$

$\iff x \in [-2;2]$

Donc : $D = [-2;2]$

b) Montrons que f est bijective de D vers J.

• Étudions la continuité de la fonction f

La fonction: $u : x \longmapsto x+2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-2,2]$ et $u([-2;2]) \subset [0;+\infty[$ et la fonction : $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc la fonction $\sqrt[3]{u}$ est continue sur $[-2,2]$ et la fonction $v : x \longmapsto 2-x$ est un continue $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-2,2]$ et $v([-2;2]) \subset [0;+\infty[$ et la fonction : $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc la fonction $\sqrt[3]{v}$ est continue sur $[-2,2]$.

Donc la fonction f est continue sur $[-2,2]$ comme somme de deux fonctions continues sur $[-2,2]$.

• Étudions la monotonie de f sur D.

Soit x et y deux éléments de D tels que $x < y$:

Puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ alors on a :

$$x < y \Longrightarrow 0 \leq x+2 < y+2 \qquad (1)$$
$$\Longrightarrow \sqrt[3]{x+2} < \sqrt[3]{y+2}$$

et
$$x < y \Longrightarrow -y < -x \qquad (2)$$
$$\Longrightarrow 0 \leq 2-y < 2-x$$
$$\Longrightarrow \sqrt[3]{2-y} < \sqrt[3]{2-x}$$
$$\Longrightarrow -\sqrt[3]{2-x} < -\sqrt[3]{2-y}$$

Donc de (1) et (2) on a : $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x} < \sqrt[3]{y+2} - \sqrt[3]{2-y}$

c'est-à-dire : $f(x) < f(y)$, d'où : $(\forall (x,y) \in D^2) ; x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$

Ainsi f est strictement croissante sur $[-2;2]$

Conclusion : f est continue et strictement croissante sur $[-2;2]$, donc f est

For more visit: L9ray.com CamScanner

une bijection de $[-2;2]$ sur l'intervalle J tel que :

$J = f([-2;2]) = [f(-2); f(2)] = [-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}]$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

Soit x un élément de l'intervalle $[-2;2]$ et $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x}}{x}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{x+2})^3 - (\sqrt[3]{2-x})^3}{x\left((\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{2-x}.\sqrt[3]{x+2} + (\sqrt[3]{2-x})^2\right)}$$

$$= \frac{2}{(\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{2-x}.\sqrt[3]{x+2} + (\sqrt{2-x})^2}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{(\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{2-x}.\sqrt[3]{x+2} + (\sqrt[3]{2-x})^2}$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3\times 2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$$

• Calculons $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

Soit x un élément de l'intervalle $[-2;2[$, on a : $f(2) = \sqrt[3]{4}$

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{4}}{x-2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{4}}{x-2} - \frac{\sqrt[3]{2-x}}{x-2}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{x+2})^3 - (\sqrt[3]{4})^3}{(x-2)\left((\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{x+2}.\sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2\right)} + \sqrt{\frac{2-x}{(2-x)^3}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{x+2}.\sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2} + \sqrt{\frac{1}{(2-x)^2}}$$

On a : $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{(\sqrt[3]{x+2})^2 + \sqrt[3]{x+2}.\sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4^2}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{(2-x)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty}\sqrt[3]{X} = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{\dfrac{1}{(2-x)^2}} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : f(x) = \sqrt[3]{2x}$

L'équation (E) est définie sur l'intervalle $[0;2]$. Soit x un élément de l'intervalle $[0;2]$ on a :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$f(x)=\sqrt[3]{2x} \iff \sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}=\sqrt[3]{2x}$$
$$\iff \left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}\right)^3=\left(\sqrt[3]{2x}\right)^3$$
$$\iff 2x-3\sqrt[3]{x+2}.\sqrt[3]{2-x}.\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}\right)=2x$$
$$\iff 3\sqrt[3]{4-x^2}.\sqrt[3]{2x}=0 \quad ou \quad \sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{2-x}$$
$$\iff x=2 \text{ ou } x=0$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S=\{0;2\}$.

Exercice 27

1) a) Déterminons D :

Soit x un réel, on a : $x \in D \iff 1-x \geq 0$ et $x \geq 0$

$$\iff x \leq 1 \text{ et } x \geq 0$$
$$\iff x \in [0;1]$$

Donc : $D=[0;1]$

b- Montrons que la fonction f est continue sur D

La fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$;

Puisque la fonction $u: x \longmapsto 1-x$ est continue sur $[0;1]$ et $u([0;1]) \subset \mathbb{R}^+$

Alors la fonction $\sqrt[3]{u}$ est continue sur $[0;1]$.

Donc la fonction f est continue sur $[0;1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[0;1]$.

c- Montrons que f est bijective.

étudions la monotonie de f sur $[0;1]$.

Soit x et y de l'intervalle $[0;1]$ tels que $x<y$;

On a : la fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

donc : $0 \leq x<y \Longrightarrow \sqrt[3]{x}<\sqrt[3]{y}$

$$\Longrightarrow -\sqrt[3]{y}<-\sqrt[3]{x} \quad (1)$$

et : $0 \leq x<y \Longrightarrow 0 \leq 1-y<1-x$

$$\Longrightarrow \sqrt[3]{1-y}<\sqrt[3]{1-x} \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit que : $\sqrt[3]{1-y}-\sqrt[3]{y}<\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{x}$ c'est-à-dire : $f(x)>f(y)$

D'où : $(\forall x;y \in [0;1]); x<y \Longrightarrow f(x)>f(y)$, par suite la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$.

On a : f est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$, donc f est une

For more visit: L9ray.com CamScanner

bijection de $[0;1]$ vers l'intervalle $J = f([0;1])$,

tel que : $J = [f(1); f(0)] = [-1;1]$

2) Montrons que : $\left(\exists c \in \left]0;\frac{1}{2}\right[\right) ; f(c) = c^3$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ par : $g(x) = f(x) - x^3$

La fonction g est continue sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$, car c'est la somme de deux fonctions continues sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

et on a : $g(0) = 1$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^3$, donc : $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\left(\exists c \in \left]0;\frac{1}{2}\right[\right) ; g(c) = 0$

c'est-à-dire : $\left(\exists c \in \left]0;\frac{1}{2}\right[\right) ; f(c) = c^3$

3)Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E): $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$

Soit D_1 l'ensemble de définition de l'équation (E), on a :

$$\begin{aligned} x \in D_1 &\iff x \in \mathbb{R} \text{ et } x \in [0;1] \text{ et } 1 - 2x \geq 0 \\ &\iff x \in \mathbb{R} \text{ et } x \in [0;1] \text{ et } x \leq \frac{1}{2} \\ &\iff x \in \left[0;\frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

Donc : $D_1 = \left[0;\frac{1}{2}\right]$

Soit x un élément de D_1, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt[3]{1-2x} &\iff \sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{1-2x} \\ &\iff \left(\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{1-2x}\right)^3 \\ &\iff 1 - 2x - 3\sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x}\right) = 1 - 2x \\ &\iff -3\sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{1-2x} = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{2} \in D$ et $0 \in D$ et $1 \notin D$ alors : $S = \left\{0;\frac{1}{2}\right\}$

4) Calculons $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{f(x)}{x - \frac{1}{2}}$

Soit x un élément de $\left]0;\frac{1}{2}\right[$, on a : $\dfrac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x}}{x - \frac{1}{2}}$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{\left(x - \frac{1}{2}\right) \times \left(\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2 + \sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$= \frac{1-2x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2+\sqrt[3]{1-x}\times\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{-2}{\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2+\sqrt[3]{1-x}\times\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{-2}{\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2+\sqrt[3]{1-x}\times\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$

alors : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x-\frac{1}{2}} = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.

Exercice 28

1) Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\cos(Arc\tan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Soit $x\in\mathbb{R}$; il existe un unique réel α de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan\alpha = x$

c'est-à-dire : $\alpha = Arc\tan x$

On a : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} = \sqrt{\cos^2\alpha} = |\cos\alpha| = \cos\alpha$

(car $\cos\alpha > 0$) donc : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos(Arc\tan x)$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\cos(Arc\tan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

• Déduisons que: $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\sin(Arc\tan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Soit $x\in\mathbb{R}$; on a : $\sin(Arc\tan x) = \cos(Arc\tan x)\times\tan(Arc\tan x)$

Puisque : $\cos(Arc\tan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\tan(Arc\tan x) = x$

alors : $\sin(Arc\tan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\sin(Arc\tan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

2) • Déterminons en fonction de x : $\sin(2Arc\tan x)$

En utilisant la formule : $(\forall a\in\mathbb{R})\,;\sin(2a) = 2\sin a\cos a$, on a :

$$\sin(2Arc\tan x) = 2\sin(Arc\tan x)\times\cos(Arc\tan x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}$$

• Déterminons en fonction de x : $\cos^2\left(\frac{1}{2}Arc\tan x\right)$

En utilisant la formule : $(\forall a\in\mathbb{R})\,;\cos^2 a = \frac{1}{2}(\cos(2a)+1)$, on a :

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}Arc\tan x\right) = \frac{1}{2}(\cos(Arc\tan x)+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+1\right) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos^2\left(\frac{1}{2}Arc\tan x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1+x\sqrt{3}}{4\sqrt{1+x^2}}$

Soit x un réel, on a : $\cos^2\left(\frac{1}{2}Arc\tan x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(Arc\tan x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right]$

Puisque : $\cos\left(Arc\tan x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(Arc\tan x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin(Arc\tan x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{-(1+x\sqrt{3})}{2\sqrt{1+x^2}}$$

alors : $\cos^2\left(\frac{1}{2}Arc\tan x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(Arc\tan x + 2\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1+x\sqrt{3}}{4\sqrt{1+x^2}}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos^2\left(\frac{1}{2}Arc\tan x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1+x\sqrt{3}}{4\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 29

1) Simplifions $A(x)$

Rappel : • $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\tan(Arc\tan x) = x$

• $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2(a)}$; $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

• Pour tout réel x de $\mathbb{R}$: $-\frac{\pi}{2} < Arc\tan x < \frac{\pi}{2}$

On a : l'expression $A(x)$ est définie si et seulement si : $x \in \mathbb{R}$ et $Arc\tan x \neq \frac{\pi}{4}$ et $Arc\tan x \neq -\frac{\pi}{4}$

c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 1$ et $x \neq -1$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on a :

$$\tan(2Arc\tan x) = \frac{2\tan(Arc\tan x)}{1-\tan^2(Arc\tan x)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

2) Simplifions $B(x)$

• L'expression $B(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $B(x) = \cos(2 \times 2Arc\tan x)$

$$= 2\cos^2(2Arc\tan x) - 1$$

$$= 2\left(\frac{1}{1+\tan^2(2Arc\tan x)}\right) - 1 = \frac{1-\tan^2(2Arc\tan x)}{1+\tan^2(2Arc\tan x)}$$

Puisque : $\tan(2Arc\tan x) = \frac{2\tan(Arc\tan x)}{1-\tan^2(Arc\tan x)} = \frac{2x}{1-x^2}$

alors : $1 + \tan^2(2Arc\tan x) = 1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(1-x^2)^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et on a : $1-\tan^2(2Arc\tan x)=1-\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2=\frac{x^4-6x^2+1}{(1-x^2)^2}$

donc : $B(x)=\left(\frac{x^4-6x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)\left(\frac{(1-x^2)^2}{(x^2+1)^2}\right)=\frac{x^4-6x^2+1}{(x^2+1)^2}$

3) Simplifions $C(x)$

• L' expression $C(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $C(x)=\cos(6Arc\tan x)$

$=\cos(3(2Arc\tan x))$

$=4\cos^3(2Arc\tan x)-3\cos(2Arc\tan x)$

$=4(2\cos^2(Arc\tan x)-1)^3-3(2\cos^2(Arc\tan x)-1)$

Puisque : $2\cos^2(Arc\tan x)-1=\frac{2}{1+\tan^2(Arc\tan x)}-1=\frac{2}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

alors : $C(x)=4\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3-3\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$=\frac{4(1-x^2)^3-3(1-x^2)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^3}=\frac{(1-x^2)(x^4-14x^2+1)}{(1+x^2)^3}$

4) Simplifions $D(x)$

• L'expression $D(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$D(x)=\sin(3Arc\tan x)=3\sin(Arc\tan x)-4\sin 3(Arc\tan x)$

Puisque : $\sin^2(Arc\tan x)=1-\cos^2(Arc\tan x)$

$=1-\frac{1}{1+\tan^2(Arc\tan x)}=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$

alors : $|\sin(Arc\tan x)|=\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$

et on a : x et $\sin(Arc\tan x)$ ont le même signe, donc : $\sin(Arc\tan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

d'où : $D(x)=\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}-4\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^3=\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{4x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{x(3-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 30

1) Calculons $\lim\limits_{|x|\to+\infty} Arc\tan\sqrt{\frac{x-1}{x}}$

On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x}}=1$, et la fonction $Arc\tan$ est continue en 1, donc :

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} Arc\tan\sqrt{\frac{x-1}{x}}=Arc\tan(1)=\frac{\pi}{4}$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)Arc\tan\left(\frac{1}{x-2}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} Arc\tan X = \frac{\pi}{2}$, donc : $\lim\limits_{x \to 2^+} Arc\tan\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{\pi}{2}$

et on a : $\lim\limits_{x \to 2^+}(x-2) = 0$; donc : $\lim\limits_{x \to 2^+}(x-2)\,Arc\tan\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$

3) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{Arc\tan(5x^2+x+1)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty}(5x^2+x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} Arc\tan X = \frac{\pi}{2}$,

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} Arc\tan(5x^2+x+1) = \frac{\pi}{2}$

et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{Arc\tan(5x^2+x+1)}{x} = 0$

4) Calculons $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} Arc\tan(\tan x)$

On a : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} Arc\tan X = -\frac{\pi}{2}$

donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} Arc\tan(\tan x) = -\frac{\pi}{2}$

5) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+4}-3}\right)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+4}-3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}} = 1$

et la fonction $Arc\tan$ est continue en 1, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-4}-3}\right) = Arc\tan(1) = \frac{\pi}{4}$$

6) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} Arc\tan\left(\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty;0[$, on a :

$$\sqrt[3]{1-x^3} = \sqrt[3]{-x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} = -x.\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}$$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}} = -1$

Puisque la fonction $Arc\tan$ est continue en -1, alors :

$$\lim_{x \to -\infty} Arc\tan\left(\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right) = Arc\tan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Exercices de synthèse

Exercice 31

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) En déduire : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan x}{x} = 1$

3) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan(x^2 - x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{Arc\tan\left(\sqrt{x^2 + x}\right)}{\sqrt{x}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(Arc\tan\left(\sqrt{x}\right) - \frac{\pi}{2}x\right)$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation: $Arc\tan x + Arc\tan(x - 1) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 32

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe au moins un réel a qui vérifie : $(fof)(a) = a$

Montrer que : $(\exists c \in IR)$; $f(c) = c$

Exercice 33

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) \neq 0$ pour tout x de I.

Montrer que : $\left((\forall x \in I); f(x) > 0\right)$ *ou* $\left((\forall x \in I); f(x) < 0\right)$

Exercice 34

1) Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[a;b]$ telle que $f(x) > 0$ pour tout x de $[a;b]$.

Montrer que : $(\exists \alpha \in IR_+^*);(\forall x \in [a;b])$; $f(x) \geq \alpha$

2) Soit g fonction définie et continue sur le segment $[a;b]$ telle que $g(x) \neq x$ pour tout x de $[a;b]$.

Montrer que : $(\exists \beta \in IR_+^*);(\forall x \in [a;b])$; $|g(x) - x| \geq \beta$

Exercice 35

Soit f et g deux fonctions numériques et continues sur le segment $[0;1]$ telles que : $g(0) = f(1)$ et $g(1) = f(0)$. Montrer que : $(\exists c \in [0;1])$; $f(c) = g(c)$

Exercice 36

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x}\right) - 1$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Montrer que :

$$(\exists(\alpha;\beta)\in IR^2);\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\right);\ \alpha x\le\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{x^2+2x}\le\beta x$$

3) Montrer que : $\left(\exists c\in\left[\frac{1}{2};1\right]\right);\sqrt{1+\frac{1}{c}}-\sqrt{c^2+2c}=c$

Exercice 37

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3+x-1$

1) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) En déduire la monotonie de f^{-1} sur J

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que : $0<\alpha<1$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)}}{x-\alpha}$

Exercice 38

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-\infty;3]$ par :

$$f(x)=Arc\tan\sqrt{3-x}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{f(x)}{x-3}$.

2) Montrer que f est bijective de l'intervalle $]-\infty;3]$ sur un intervalle J à déterminer.

3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

4) Montrer qu'il existe un réel α de l'intervalle $]2;3[$ tel que : $f(\alpha)=1-\dfrac{\alpha}{4}$

Exercice 39

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f puis simplifier son expression

1) $f(x)=Arc\tan\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$

2) $f(x)=Arc\tan\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)$

3) $f(x)=Arc\tan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

4) $f(x)=Arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

5) $f(x)=Arc\tan(\sqrt{1+x^2}-x)$

6) $f(x)=Arc\tan\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$;

(Calculer $\tan(3\alpha)$ en fonction de $\tan\alpha$).

Exercice 40

1) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

a-Montrer que g est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]-1; 1[$;

b-Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1; 1[$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = Arc\tan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

a- Montrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer ;

b- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J ;

c- Calculer : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

Exercices de synthèse

Exercice 31

1) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, il existe un unique élément α de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan\alpha = x$, c'est-à-dire : $\alpha = Arc\tan x$

On a : $\frac{1}{x} = \frac{1}{\tan\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Puisque : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0$

$$\Longleftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$$

alors : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

donc : $Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) Déduction

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty ; 0[$, on a : $-x \in]0; +\infty[$

Puisque la fonction $Arc\tan$ est impaire et $Arc\tan(-x) + Arc\tan\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

alors : $-Arc\tan(x) - Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$,

c'est-à-dire $Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

2) Montrons que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan x}{x} = 1$

Soit x un nombre réel, on pose $y = Arc\tan x$ donc $x = \tan y$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\tan x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\tan y}=1$ car : $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\tan y}{y}=1$

3) Calculons les limites suivantes :

a) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\tan(x^2-x)}{x}$

On a : $\dfrac{Arc\tan(x^2-x)}{x}=\dfrac{Arc\tan(x^2-x)}{x^2-x}\times\dfrac{x^2-x}{x}$

On pose : $t=x^2-x$,

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\tan(x^2-x)}{x^2-x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{Arc\tan t}{t}=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$ donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\tan(x^2-x)}{x}=-1$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{Arc\tan\left(\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x}}$

On a : $\dfrac{Arc\tan\left(\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x}}=\dfrac{Arc\tan\left(\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2+x}}\times\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x}}$

On pose : $t=\sqrt{x^2+x}$,

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{Arc\tan\left(\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2+x}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{Arc\tan t}{t}=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{x^2+x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{Arc\tan\left(\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x}}=+\infty$

c) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}xArc\tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$;

On a : $xArc\tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2\times Arc\tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{x}\times\dfrac{Arc\tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

On pose : $t=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Arc\tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{Arc\tan t}{t}=1$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}xArc\tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$

d) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xArc\tan\left(\sqrt{x}\right)-\dfrac{\pi}{2}x\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$Arc\tan\left(\sqrt{x}\right)+Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

c'est-à-dire : $Arc\tan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} = -\,Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Donc : $xArc\tan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}x = -\,xArc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty} xArc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$ alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xArc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = -\infty$ d'après 3)c)

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xArc\tan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}x\right) = -\infty$

e) Calculons $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;1[$, on a : $x^2 < \frac{1}{x}$ c'est-à-dire : $x < \frac{1}{\sqrt{x}}$

donc : $\frac{1}{\sqrt{x}} - x > 0$,

D'où : $Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) + Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x}}{1 - x\sqrt{x}}\right) = \frac{\pi}{2}$

c'est-à-dire : $Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right) = \frac{\pi}{2}$ car $Arc\tan$ est impaire

Donc : $Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - \frac{\pi}{2} = Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right)$

$$\frac{Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}} = \frac{Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right)}{\sqrt{x}}$$

D'où :

$$= \frac{Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}} \times \frac{\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}} \times \frac{1}{x\sqrt{x} - 1}$$

On pose : $t = \dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}$,

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1}} = \lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{Arc\tan t}{t} = 1$, et on a : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x\sqrt{x} - 1} = -1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{Arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}\right)}{\sqrt{x}}=-1$ d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{Arc\tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-x\right)-\dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{x}}=-1$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}^*$ l'équation (E) : $Arc\tan(x)+Arc\tan(x-1)=\dfrac{\pi}{2}$

L'ensemble de définition de l'équation (E) est : $D=\mathbb{R}$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (E);

On a : $(\forall x\in\mathbb{R}_-^*)$; $Arc\tan(x)<0$, donc : $S\subset\mathbb{R}_+^*$

D'où l'équation (E) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^-$.

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $Arc\tan(x)+Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

donc l'équation (E) est équivalente à : $Arc\tan(x-1)=Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Puisque la fonction $Arc\tan$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, alors l'équation (E) est équivalente à : $x-1=\dfrac{1}{x}$ et $x>0$ c'est-à-dire : $x^2-x-1=0$ et $x>0$.

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Puisque $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>0$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ alors $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Exercice 32

Montrons que : $(\exists c\in\mathbb{R})\,;f(c)=c$

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)-x$

On a g est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

On a : $g(a)=f(a)-a$ et $g(f(a))=f(f(a))-f(a)=a-f(a)$ (car $f(f(a))=a$)

donc : $g(a)\times g(f(a))=-(f(a)-a)^2$

- Si $f(a)=a$ alors $c=a$
- Si $f(a)\neq a$ alors on a soit $f(a)>a$ ou $f(a)<a$

On suppose que : $f(a)<a$ (pour la démonstration; de même si on suppose $f(a)>a$)

On a : g est continue sur le segment $[f(a);a]$ et $g(a)\times g(f(a))<0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire : $(\exists c\in]f(a);a[)\,;g(c)=0$ c'est-à-dire : $(\exists c\in]f(a);a[)\,;f(c)=c$, d'où : $(\exists c\in\mathbb{R})\,;f(c)=c$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 33

Montrons que: $\left((\forall x \in I)\ ;\ f(x) > 0\right)$ ou $\left((\forall x \in I)\ ;f(x) < 0\right)$ en utilisant le raisonnement par l'absurde. On a : $f(x) \neq 0$ pour tout x de I.

On suppose que : $\left((\exists b \in I)\ ; f(b) < 0\right)$ et $\left((\exists a \in I)\ ; f(a) > 0\right)$

On a : $[a;b] \subset I$ et la fonction f est continue sur I, donc f est continue sur $[a;b]$.

D'où f est continue sur $[a;b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a : $(\exists c \in]a;b[)\ ; f(c) = 0$

c'est-à-dire : $(\exists c \in I)\ ; f(c) = 0$ et cela est contradictoire avec le fait que : $(\forall x \in I)\ ;\ f(x) \neq 0$

Donc : $\left((\forall x \in I)\ ; f(x) < 0\right)$ ou $\left((\forall x \in I)\ ; f(x) > 0\right)$

Exercice 34

1) Montrer que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*);(\forall x \in [a;b])\ ;\ f(x) \geq \alpha$

La fonction f est continue sur le segment $[a;b]$, donc : $f([a;b]) = [m;M]$

où : $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ et $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$

Rappel : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment

et on a : $(\forall x \in [a;b])\ ;\ m \leq f(x) \leq M$ (1)

Puisque f est surjective de $[a;b]$ vers $[m;M]$ alors $(\exists c \in [a;b])\ ; f(c) = m$

et on a : $f(c) > 0$ donc $m > 0$

On prend : $\alpha = m$, d'après la double inégalité (1), on a : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*);(\forall x \in [a;b])\ ;\ f(x) \geq \alpha$

2) Montrons que : $(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)/(\forall x \in [a;b])\ ;\ |g(x) - x| \geq \beta$:

On considère la fonction numérique h définie sur $[a;b]$ par : $h(x) = |g(x) - x|$

On a : $(\forall x \in [a;b])$; $g(x) \neq x$ donc: $(\forall x \in [a;b])\ ; h(x) > 0$

et puisque la fonction g est continue sur le segment $[a;b]$ alors la fonction h est continue sur $[a;b]$.

Donc d'après la question 1) : $(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*);(\forall x \in [a;b])\ ; h(x) \geq \beta$

D'où : $(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*);(\forall x \in [a;b])\ ;\ |g(x) - x| \geq \beta$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 35

Montrons que : $(\exists c \in [0;1]) ; f(c) = g(c)$

On considère la fonction numérique h définie sur le segment $[0;1]$ par :

$h(x) = f(x) - g(x)$

On a : h est continue sur le segment $[0;1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[0;1]$.

D'autre part, on a : $h(0) = f(0) - g(0)$ et $f(1) = g(0)$

donc : $h(0) = f(0) - f(1)$

et on a : $h(1) = f(1) - g(1)$ et $g(1) = f(0)$ donc $h(1) = f(1) - f(0)$

d'où : $h(0) \times h(1) = -(h(0))^2$

- Si $h(0) = 0$ alors $f(0) = g(0)$ donc $c = 0$
- Si $h(0) \neq 0$ alors $-(h(0))^2 < 0$

Puisque h est continue sur $[0;1]$ et $h(0) \times h(1) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $(\exists c \in]0;1[); h(c) = 0$

C'est-à-dire : $(\exists c \in]0;1[) ; f(c) = g(c)$

Ainsi : $(\exists c \in [0;1]) / f(c) = g(c)$

Exercice 36

11) Déterminons D :

Soit x un réel, on a :

$$x \in D \iff x \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} \geq 0 \text{ et } x^2 + 2x \geq 0$$

$$\iff x \neq 0 \text{ et } \frac{x+1}{x} \geq 0 \text{ et } x(x+2) \geq 0$$

$$\iff x \neq 0 \text{ et } x(x+1) \geq 0 \text{ et } x(x+2) \geq 0$$

$$\iff \begin{cases} x \in]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[\\ x \in]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[\end{cases}$$

$$\iff x \in]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[$$

Donc: $D =]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[$

2) Montrons que : $\left(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2\right);\left(\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right) ; \alpha x \leq \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{x^2+2x} \leq \beta$

Soit g le fonction numérique définie sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ par :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$g(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{x^2+2x}\right)$

Les fonctions : $u : x \longmapsto 1+\frac{1}{x}$ et $v : x \longmapsto x^2+2x$ sont continues sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ et $u(x) \geq 0$ et $v(x) \geq 0$ pour tout x de $\left[\frac{1}{2};1\right]$,

c'est-à-dire : $u\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right) \subset \mathbb{R}^+$ et $v\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right) \subset \mathbb{R}^+$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$

Donc: la fonction $\sqrt{u}$ et $\sqrt{o}$ sont continues sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ comme composées de deux fonctions continues et la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$

Donc la fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$, comme somme et produit de fonctions continues sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$

Par suite la fonction g est continue sur le segment $\left[\frac{1}{2};1\right]$ et l'image d'un segment par une fonction continue est un segment

donc : $\left(\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right); g\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right) = [\alpha;\beta]$

c'est-à-dire : $\left(\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right); \left(\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right)$; $\alpha \leq g(x) \leq \beta$

D'où : $\left(\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right); \left(\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right)$; $\alpha x \leq \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{x^2+2x} \leq \beta x$

3) Montrons que : $\left(\exists c \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right) / \sqrt{1+\frac{1}{c}} - \sqrt{c^2+2c} = c$

On a : $f(1) = \sqrt{2} - \sqrt{3} - 1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{\frac{5}{4}}\right) - 1 = 2\sqrt{3} - \sqrt{5} - 1$

Puisque : $\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1 < 0$ et $2\sqrt{3} - \sqrt{5} - 1 > 0$ alors : $f(1) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

On a f est continue sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ et $f(1) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires. $\left(\exists c \in \left]\frac{1}{2};1\right[\right); f(c) = 0$

D'où : $\left(\exists c \in \left]\frac{1}{2};1\right[\right); \sqrt{1+\frac{1}{c}} - \sqrt{c^2+2c} = c$

Exercice 37

1) a) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}

- Étudions la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 6x^2+1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Puisque $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle J tel que :

$J = f(I) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x) ; \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty ; +\infty[$

car : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Par suite f admet une bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déduction : La fonction f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car elle a la même monotonie que f.

2) a) Montrons que: $(\exists!\alpha \in \mathbb{R}); f(\alpha) = 0$

On a : f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et puisque $0 \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique élément α de $\mathbb{R}$ tel que : $f(\alpha) = 0$ (c'est-à-dire : 0 admet un unique antécédent)

- Montrons que: $0 < \alpha < 1$

On a : $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$ c'est-à-dire $f^{-1}(-1) = 0$ et $f^{-1}(2) = 1$

Puisque f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors :

$$-1 < 0 < 2 \Longrightarrow f^{-1}(-1) < f^{-1}(0) < f^{-1}(2)$$

c'est-à-dire : $0 < \alpha < 1$ car $f^{-1}(0) = \alpha$

b) Calculons : $\lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt[3]{f(x)}}{x-\alpha}$

Soit x un élément de l'intervalle $]\alpha ; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(\alpha) &= 2x^3 + x - 2\alpha^3 - \alpha \\ &= 2(x^3 - \alpha^3) + (x - \alpha) \\ &= 2(x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2) + (x - \alpha) \\ &= (x-\alpha)(2x^2 + 2\alpha x + 2\alpha^2 + 1) \end{aligned}$$

Donc : $\frac{\sqrt[3]{f(x)}}{x-\alpha} = \sqrt[3]{\frac{f(x)}{(x-\alpha)^3}} = \sqrt[3]{\frac{2x^2 + 2\alpha x + 2\alpha^2 + 1}{(x-\alpha)^2}}$

Puisque : $\lim_{x\to\alpha^+} \frac{2x^3 + 2\alpha x + 2\alpha^2 + 1}{(x-\alpha)^2} = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$

alors : $\lim_{x\to\alpha^+} \sqrt[3]{\frac{2x^3 + 2\alpha x + 2\alpha^2 + 1}{(x-\alpha)^2}} = +\infty$

D'où : $\lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt[3]{f(x)}}{x-\alpha} = +\infty$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 38

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)}{x-3}$

Soit x un élément de $]-\infty;3[$, on a : $\dfrac{f(x)}{x-3}=\dfrac{Arc\tan\sqrt{3-x}}{x-3}$

On pose : $t=Arc\tan\sqrt{3-x}$, donc : $\tan t=\sqrt{3-x}$

c'est-à-dire : $x-3=-\tan^2 t$;

On a : $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)}{x-3}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{-t}{\tan^2 t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{\tan t}\times\left(\dfrac{-1}{\tan t}\right)=-\infty$

car : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{\tan t}=1$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{\tan t}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)}{x-3}=-\infty$

2) Montrons que f est bijective

• Étudions la continuité de f sur $]-\infty;3]$

La fonction $u:x\longmapsto\sqrt{3-x}$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;3]$ et $u(]-\infty;3])\subset\mathbb{R}$ et la fonction $Arc\tan$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f=Arc\tan$ ou est continue sur l'intervalle $]-\infty;3]$.

• Étudions la monotonie de f sur l'intervalle $]-\infty;3]$.

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $]-\infty;3]$ tel que : $x<y$.

On a : $x<y\leq 3\Longrightarrow 0\leq 3-y<3-x$

$\Longrightarrow\sqrt{3-y}<\sqrt{3-x}$

Puisque $Arc\tan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors :

$x<y\Longrightarrow Arc\tan\sqrt{3-y}<Arc\tan\sqrt{3-x}$

$\Longrightarrow f(x)>f(y)$

Donc : $(\forall x;y\in]-\infty;3]);\ (x<y\Rightarrow f(x)>f(y))$ d'où la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;3]$.

Par suite f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;3]$;

donc f est bijective de l'intervalle $]-\infty;3]$ sur l'intervalle $J=[f(3);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)[$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}Arc\tan X=\dfrac{\pi}{2}$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$

et on a : $f(3)=0$, donc $J=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

3) Déterminons $f^{-1}(x)$

Soit $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $y\in]-\infty;3]$, tel que : $f^{-1}(x)=y$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $f^{-1}(x) = y \iff x = f(y)$

$\iff x = Arc\tan\sqrt{3-y}$

$\iff \tan x = \sqrt{3-y}$

$\iff y = 3 - \tan^2 x$

Donc : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$: $f^{-1}(x) = 3 - \tan^2 x$

4) Montrons que : $(\exists \alpha \in]2;3[)$: $f(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{4}$

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[2;3]$ par :

$g(x) = f(x) + \frac{x}{4} - 1$

• La fonction g est continue sur le segment $[2;3]$, car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[2;3]$.

• On a : $g(2) = \frac{\pi - 2}{4}$ et $g(3) = -\frac{1}{4}$, c'est-à-dire $g(2) > 0$ et $g(3) < 0$

Donc : $g(2)g(3) < 0$ d'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$(\exists \alpha \in]2;3[)$; $g(\alpha) = 0$

signifie que : $(\exists \alpha \in]2;3[)$; $f(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{4}$

Exercice 39

1) On a : $f(x) = Arc\tan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$

• Déterminons D, ensemble de définition de f :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x \neq 0$

$\iff x \in \mathbb{R}^*$

Donc : $D = \mathbb{R}^*$.

• Simplifions $f(x)$:

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -f(x)$

donc la fonction f est impaire, d'où il suffit de simplifier f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, il existe un unique élément α de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan\alpha = x$, c'est-à-dire $\alpha = Arc\tan x$.

• Écrivons $\frac{x^2-1}{2x}$ en fonction de α, on a :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$\frac{x^2-1}{2x}=\frac{\tan^2\alpha-1}{2\tan\alpha}=\frac{-1}{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}=\frac{-1}{\tan 2\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)$$

Donc : $f(x)=Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)$

et on a : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<2\alpha<\pi$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+2\alpha<\frac{\pi}{2}+\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)-\pi<\frac{\pi}{2}$$

Puisque : $\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\tan\left(\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)-\pi\right)$

alors :

$$f(x)=Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)=Arc\tan\left(\tan\left(\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)-\pi\right)\right)=\frac{\pi}{2}+2\alpha-\pi$$

$$=2\alpha-\frac{\pi}{2}=2Arc\tan(x)-\frac{\pi}{2}$$

Donc : $(\forall x\in\ ]0;+\infty[)\ ;\ f(x)=2Arc\tan(x)-\frac{\pi}{2}$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty;0[$;

On a $-x>0$ et f est impaire, donc :

$$f(x)=-f(-x)$$

$$=-\left(2Arc\tan(-x)-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\left(-2Arc\tan(x)-\frac{\pi}{2}\right)=2Arc\tan(x)+\frac{\pi}{2}$$

D'où : $(\forall x\in\ ]-\infty;0[)\ ;\ f(x)=2Arc\tan(x)+\frac{\pi}{2}$

Par suite : $\begin{cases} f(x)=2Arc\tan(x)-\frac{\pi}{2}\ ;\ x>0 \\ f(x)=2Arc\tan(x)+\frac{\pi}{2}\ ;\ x<0 \end{cases}$

2) On a : $f(x)=Arc\tan\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)$

* Déterminons D ensemble de définition de f

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $x\in D\Leftrightarrow \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\geq 0\ 1+\sin x\neq 0$

Puisque : $1+\sin x=0\Leftrightarrow \sin x=-1$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

et on a $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

car : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ Donc : $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

• Simplifions $f(x)$:

On a : $(\forall x \in D)$; $x + 2\pi \in D$ et $f(x + 2\pi) = f(x)$ donc la fonction f est périodique de période 2π ; d'où il suffit de simplifier f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Soit x un élément de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$, on a :

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

Donc : $f(x) = Arc\tan\left(\sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\right) = Arc\tan\left(\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|\right)$

Puisque : $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < -\frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

alors on a deux cas :

Cas 1: Si $0 \leq \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$, alors : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \geq 0$

Donc : $f(x) = Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$

Cas 2: Si $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \leq 0$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}$ alors $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \leq 0$;

Puisque $Arc\tan$ est impaire, alors :

$$f(x) = Arc\tan\left(-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= -Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right) = -\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Donc : $\begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \ ; \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \ ; \ x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[\end{cases}$ ou $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[\right) \ ; \ f(x) = \left|\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right|$

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier relatif k tel que :

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$; c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2} < x - 2k\pi < \frac{3\pi}{2}$

Donc : $f(x) = \left|\frac{x}{2} - k\pi - \frac{\pi}{4}\right|$

3) On a : $f(x) = Arc\tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Déterminons D, ensemble de définition de f

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow 1 - x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$

Donc : $D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

• Simplifions $f(x)$:

Soit $x \in D$, il existe un unique élément α de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et tel que : $\tan\alpha = x$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$,

on a : $\alpha = Arc\tan x$

• Écrivons $\frac{1+x}{1-x}$ en fonction de α; On a :

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

Donc : $f(x) = Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)$

Puisque : $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \alpha + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

alors on a deux cas :

Cas 1: Si : $-\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{4}$, signifie que : $x < 1$

alors : $f(x) = Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{4} + Arc\tan x$

Donc : $(\forall x \in]-\infty; 1[)$; $f(x) = \frac{\pi}{4} + Arc\tan x$

Cas 2: Si : $\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, signifie que $x > 1$

et puisque : $\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \pi < \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \pi < \frac{3\pi}{4} - \pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \pi < -\frac{\pi}{4}$

et $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \tan\left(\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \pi\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

alors :

$$f(x) = Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right) = Arc\tan\left(\tan\left(\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \pi\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \alpha - \pi = -\frac{3\pi}{4} + Arc\tan x$$

Donc : $(\forall x \in]1; +\infty[) \; ; \; f(x) = -\frac{3\pi}{4} + Arc\tan x$

Par suite : $\begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{4} + Arc\tan x \; ; \; x < 1 \\ f(x) = -\frac{3\pi}{4} + Arc\tan x \; ; \; x > 1 \end{cases}$

4) On a : $f(x) = Arc\tan\left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}\right)$

• Déterminons D ensemble de définition de f

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x \neq 01 + x^2 \geq 0$

$\iff x \neq 0$

$\iff x \in \mathbb{R}^*$

Donc : $D = \mathbb{R}^*$.

• Simplifions $f(x)$:

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un unique réel α de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$\tan\alpha = x$ et $\alpha \neq 0$

On a : $\alpha = Arc\tan x$

• Écrivons $\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ en fonction de α;

On a : $\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \frac{1}{\tan\alpha} \cdot \left(\sqrt{1 + \tan^2 x} - 1\right) = \frac{1}{\tan\alpha} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} - 1\right)$

$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \left(\frac{1}{|\cos\alpha|} - 1\right) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

Puisque : $\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

alors : $\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, donc : $\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

c'est-à-dire : $f(x) = Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

et on a : $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}, \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$

donc : $f(x) = Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}Arc\tan x$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $f(x) = \frac{1}{2} Arc\tan x$

5) On a : $f(x) = Arc\tan(\sqrt{1+x^2} - x)$

• Déterminons D ensemble de définition de f :

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $x \in D \Leftrightarrow 1 + x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Donc : $D = \mathbb{R}$

• Simplifions $f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel α de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, tel que : $\tan\alpha = x$ c'est-à-dire $\alpha = Arc\tan x$

• Écrivons $\sqrt{1+x^2} - x$ en fonction de α.

On a : $\sqrt{1+x^2} - x = \sqrt{1+\tan^2\alpha} - \tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{|\cos\alpha|} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$= \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Puisque : $1 - \sin\alpha = 1 - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$= \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$

et $\cos\alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right).\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)$

alors : $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$

Donc : $f(x) = Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$

et on a : $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < -\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$

Donc : $f(x) = Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} Arc\tan x$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} Arc\tan x$

6) On a : $f(x) = Arc\tan\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$

• Déterminons D ensemble de définition de f :

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow 1 - 3x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } x \neq -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Donc : $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

- Simplifions $f(x)$:

Soit $x \in D$, il existe un unique réel α de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ avec $\alpha \neq \frac{\pi}{6}$ et $\alpha \neq -\frac{\pi}{6}$ tel que : $\tan\alpha = x$ c'est-à-dire $\alpha = Arc\tan x$

- Écrivons $\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$ en fonction de α.

On a : $\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$

et on a : $\tan(3\alpha) = \tan(\alpha + 2\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan(2\alpha)}{1 - \tan\alpha\tan(2\alpha)}$

Puisque :

$$\tan\alpha + \tan(2\alpha) = \tan\alpha + \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{\tan\alpha - \tan^3\alpha + 2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

et

$$1 - \tan\alpha\tan(2\alpha) = 1 - \tan\alpha.\frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{1 - \tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{1 - 3\tan^2\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

alors : $\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.\frac{1 - \tan^2\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$

Donc : $\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \tan(3\alpha)$, d'où : $f(x) = Arc\tan(\tan(3\alpha))$

et on a : $\begin{cases} -\frac{3\pi}{2} < 3\alpha < \frac{3\pi}{2} \\ 3\alpha \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{6} \end{cases}$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $3\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$

$\alpha \neq -\frac{\pi}{6}$ et $\alpha \neq -\frac{\pi}{6}$

On a donc 3 cas :

Cas 1 : Si : $-\frac{3\pi}{2} < 3\alpha < -\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{6}$ signifie que : $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Puisque : $-\frac{3\pi}{2} < 3\alpha < -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < 3\alpha + \pi < \frac{\pi}{2}$ et $\tan(3\alpha) = \tan(3\alpha + \pi)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

alors :

$f(x) = Arc\tan(\tan(3\alpha)) = Arc\tan(\tan(3\alpha + \pi)) = 3\alpha + \pi = 3Arc\tan(x) + \pi$

donc : $\left(\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[\right)$; $f(x) = 3Arc\tan(x) + \pi$

Cas 2 : Si : $-\frac{\pi}{2} < 3\alpha < \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{6}$, signifie que : $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

alors : $f(x) = Arc\tan(\tan(3\alpha)) = 3\alpha = 3Arc\tan(x)$

donc : $\left(\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[\right)$; $f(x) = 3Arc\tan(x)$

Cas 3 : Si $\frac{\pi}{2} < 3\alpha < \frac{3\pi}{2}$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, signifie que : $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$

Puisque : $\frac{\pi}{2} < 3\alpha < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < 3\alpha - \pi < \frac{\pi}{2}$ et $\tan(3\alpha) = \tan(3\alpha - \pi)$

alors :

$f(x) = Arc\tan(\tan(3\alpha)) = Arc\tan(\tan(3\alpha - \pi)) = 3\alpha - \pi = 3Arc\tan(x) - \pi$

donc : $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right[\right)$; $f(x) = 3Arc\tan(x) - \pi$

Par suite :
$$\begin{cases} f(x) = 3Arc\tan(x) + \pi \ ; \ x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ f(x) = 3Arc\tan(x) \ ; \ -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ f(x) = 3Arc\tan(x) - \pi \ ; \ x > \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Exercice 40

1) a-Montrons que g est bijective.

La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$, et on a :

$$(\forall x \in [0; +\infty[) \ ; \ g'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[) \ ; \ g'(x) \leq 0$; d'où la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$,

et on a : g est continue sur $[0; +\infty[$, d'où la fonction g est une bijection de l'intervalle $[0; +\infty[$ sur l'intervalle J tel que :

$$J = g([0; +\infty[) = \left]\lim_{x \to +\infty} g(x); g(0)\right] = \left]-1; 1\right]$$

b- Déterminons $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle $\left]-1; 1\right]$

Soit x un élément de $\left]-1; 1\right]$ et y un élément de $[0; +\infty[$, tels que $g^{-1}(x) = y$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{1-y^2}{1+y^2} = x$$

$$\Leftrightarrow (x+1)y^2 = 1-x$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (\text{car } y \geqslant 0)$$

Donc : $(\forall x \in]-1;1[) : g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

2) a- Montrons que f est bijective.

• Continuité de f.

La fonction g est continue sur $[0; +\infty[$ et $g([0; +\infty[) \subset \mathbb{R}$ et la fonction $Arc\tan$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f = Arc\tan og$ est continue sur $[0; +\infty[$

• Monotonie de f sur $[0; +\infty[$

La fonction g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et $g([0; +\infty[) \subset \mathbb{R}$ et la fonction $Arc\tan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

donc $f = Arc\tan og$ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, d'où f est bijective de $[0; +\infty[$ sur $J = f([0; +\infty[)$.

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$ et $Arc\tan$ est continue en -1

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = Arc\tan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ et $f(0) = \frac{\pi}{4}$, donc :

$$J = \left]\lim_{x \to +\infty} f(x); f(0)\right] = \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$$

b- Déterminons $f^{-1}(x)$.

Soit x un élément de $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ et y un élément de $[0; +\infty[$ tels que :

$$f^{-1}(x) = y$$

On a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow Arc\tan(g(y)) = x$$

$$\Leftrightarrow g(y) = \tan x$$

$$\Leftrightarrow y = g^{-1}(\tan x) = \sqrt{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et on a : $y = \sqrt{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}} = \sqrt{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}} = \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

Donc : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\right)$; $f'(x) = \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

c - Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$

On pose : $y = f(x)$, on a : $y = f(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}$

Donc : $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{y}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}-1} = \frac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-1} \times \left(\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}+1\right)$

et on a : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right) - 1 = \frac{1-\tan y}{1+\tan y} - 1 = \frac{-2\tan y}{1+\tan y}$

Donc : $\frac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-1} = \frac{y}{\tan y} \times \left(\left(\frac{1+\tan y}{-2}\right)\right)$

et puisque : $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\tan y} \times \left(\left(\frac{1+\tan y}{-2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-1} = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{y\to 0}\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}+1 = 2$

alors : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}-1} = -\frac{1}{2}\times 2 = -1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

2 Leçon Dérivation et étude de fonctions

Maxi.

Résumé

I Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété:

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J tels que: $f(I) \subset J$

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J, alors la fonction gof est dérivable sur I et on a: $(\forall x \in I)\ ;\ (gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

II Dérivabilité d'une fonction réciproque

Propriété:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et on a: $(\forall x \in J)\ ;\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

III Dérivés des fonctions : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$

Soit n un entier naturel supérieur à 1.

- La fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on a:

$(\forall x \in]0; +\infty[)\ ;\ f'(x) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

- Si une fonction u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I

alors la fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et on a:

$(\forall x \in I)\ ;\ f'(x) = \dfrac{1}{n}u'(x)(u(x))^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$

IV Dérivées des fonctions : $x \longmapsto x^r$ et $x \longmapsto (u(x))^r$ ou $r \in \mathbb{Q}^*$

Soit r un nombre rationnel non nul

For more visit: L9ray.com CamScanner

- La fonction $f: x \longmapsto x^r$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) = rx^{r-1}$

- Si une fonction u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $f: x \longmapsto (u(x))^r$ est dérivable sur I et on a :

$(\forall x \in I) ; f'(x) = ru'(x)(u(x))^{r-1}$

Exercices

Exercice 1

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$$

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$

2) a) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point $x_0 = 1$

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en $x_1 = -2$

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $D - \{-2;1\}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par : $f(x) = \sqrt[3]{1 - \cos x}$

1) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;\pi]$.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0;\pi]$

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sin x}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

1) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Montrer que : $(\forall x \in I) ; f'(x) = (f(x) - 1) \times \sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)}$

3) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$, et que :

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{(x-1) \times \sqrt{x^2 - 2x}}$ pour tout réel x de l'intervalle $]2; +\infty[$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f après avoir déterminé D_f son ensemble définition, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée :

1) $f(x) = (x-1) \times \sqrt[3]{2x}$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x+2}$

3) $f(x) = \dfrac{2\sqrt[3]{x}}{1 + x\sqrt{x}}$

4) $f(x) = x \times \sqrt[3]{1 - \dfrac{2}{x}}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x} - x$

6) $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^4$

7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$

8) $f(x) = x \times \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-2}}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1$

1) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b) Montrer que la fonction dérivée f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, en déduire que : $(\exists! \alpha \in \mathbb{R}) / f'(\alpha) = 0$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2) a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right) f'(x) + \left(3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)$

b) Montrer que : $f(\alpha) > 0$

c) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) > 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

Solutions

Exercice 1

1) a) Déterminons D :

Soit x un réel, on a : $x \in D \iff x^3 - 3x + 2 \geq 0$

$\iff (x-1)(x^2+x-2) \geq 0$

$\iff (x-1)^2(x+2) \geq 0$

$\iff x = 1$ ou $x \geq -2$

$\iff x \geq -2$

$\iff x \in [-2; +\infty[$

Donc : $D = [-2; +\infty[$

b) • Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 3x + 2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$,

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

Soit x un réel de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}}{x} = \frac{x \times \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}}{x} = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 1$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue en 1,

alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \sqrt[3]{1} = 1$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

• Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$:

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$f(x) - x = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} - x = \frac{-3x + 2}{\left(\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}\right)^2 + x \times \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} + x^2}$$

$$= \frac{x^2\left(\frac{-3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \times \left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + 1\right)}$$

$$= \frac{-\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + 1\right)}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}+1=3$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}+1}=0$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

2) a) • Etudions la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0=1$:

Soit x un élément de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a : $f(1)=0$

et $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2\times(x+2)}}{x-1}=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2\times(x+2)}{(x-1)^3}}=\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt[3]{X}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}=+\infty$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en $x_0=1$.

• Etudions la dérivabilité de f à gauche en $x_0=1$:

Soit x un élément de l'intervalle $]-2;1[$, on a :

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2\times(x+2)}}{x-1}=-\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2\times(x+2)}{-(x-1)^3}}=-\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{1-x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+2}{1-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt[3]{X}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{1-x}}=+\infty$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche en $x_0=1$.

b) Etudions la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_1=-2$:

Soit x un élément de l'intervalle $]-2;+\infty[$, on a : $f(-2)=0$

et $\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2\times(x+2)}}{x+2}=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2\times(x+2)}{(x+2)^3}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-2^+}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt[3]{X}=+\infty$, alors :

$\lim\limits_{x\to-2^+}\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^2}=+\infty$

For more visit: L9ray.com CamScanner

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = +\infty$

Signifie que la fonction f n'est pas dérivable à droite en $x_1 = -2$.

3) a) Calculons $f'(x)$ où $x \in D-\{-2;1\}$:

La fonction $u: x \mapsto x^3 - 3x + 2$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-2;1[$ et $]1;+\infty[$ et $u(x) > 0$ pour tout réel x de $]-2;1[\cup]1;+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Donc la fonction $f = \sqrt[3]{u}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-2;1[$ et $]1;+\infty[$.

Soit x un élément de $D-\{-2;1\}$, on a : $u'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1)$

et $f'(x) = \dfrac{u(x)}{3\times\sqrt[3]{(u(x))^2}} = \dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}$

Ainsi : $(\forall x \in D-\{-2;1\})\ ; f'(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}$

b) Tableau de variations de la fonction f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de x^2-1 sur $D-\{-2;1\}$, donc le tableau de variations de f est comme suit

x	-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	0	-	$-\infty$ | $+\infty$	+	
f	0	↗	$\sqrt[3]{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

Exercice 2

1) Montrons que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;\pi]$:

On a la fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur l'intervalle $]0;\pi]$, donc la fonction $u: x \mapsto 1-\cos x$ est dérivable sur l'intervalle $]0;\pi]$.

Et puisque $u(x) > 0$ pour tout x de $]0;\pi]$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{u}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ alors la fonction $f = \sqrt[3]{u}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;\pi]$.

2) Calculons $f'(x)$ pour tout x de $]0;\pi]$:

Soit x un élément de $]0;\pi]$, on a : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{3\times\sqrt[3]{(u(x))^2}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et comme : $u'(x) = \sin(x)$ alors : $f'(x) = \dfrac{\sin x}{3\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$

Donc : $(\forall x \in]0;\pi]) ; f'(x) = \dfrac{\sin x}{3 \times \sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$

3) Etudions la dérivabilité de la fonction f à droite en 0:

Soit x un élément de l'intervalle $]0;\pi]$, on a : $f(0) = 0$

et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{1-\cos x}{x^3}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos x}{x^3} = +\infty$. Et comme : $\lim\limits_{X\to +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\dfrac{1-\cos x}{x^3}} = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

Finalement la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation graphique :

On a la fonction est continue à droite en 0 et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, donc la courbe de la fonction f admet une demi-tangente verticale au point O dirigée vers le haut.

Exercice 3

1) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} :

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$ donc la fonction $f: x \mapsto 1 + \dfrac{1}{\sin x}$ est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

Et on a : $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right[\right) ; f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2(x)}$

Puisque : $f'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

et $f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2}$, alors f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

Donc la fonction f est continue et strictement croissante sur $I = \left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

Par suite, f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$

où $J = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right); \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)\right[= [2;+\infty[$

Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = [2;+\infty[$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Montrons que $(\forall x \in I)\ ; f'(x) = (f(x)-1) \times \sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)}$:

Soit x un élément de l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, on a : $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2(x)}$

et $(f(x))^2 - 2f(x) = (f(x)-1)^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2(x)} - 1 = \frac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2$

Puisque : $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ alors : $\frac{\cos x}{\sin x} \leq 0$.

Il s'ensuit que : $\sqrt{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} = -\frac{\cos x}{\sin x}$ .Par suite : $\sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)} = -\frac{\cos x}{\sin x}$

Donc : $(f(x)-1) \times \sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)} = \frac{1}{\sin x} \times \left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right) = -\frac{\cos x}{\sin^2(x)} = f'(x)$

Finalement : $(\forall x \in I)\ ; f'(x) = (f(x)-1) \times \sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)}$

3) • Montrons que la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$:

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout réel $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$,

donc la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f\left(\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\right)$ où

$f\left(\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\right) = \left]f\left(\frac{\pi}{2}\right); \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x)\right[=]2; +\infty[$

Donc la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

• Montrons que $(\forall x \in]2; +\infty[)\ ; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(x-1) \times \sqrt{x^2 - 2x}}$:

Soit x un élément de l'intervalle $]2; +\infty[$, on a : $f^{-1}(x) \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

Donc, d'après la question précédente :

$f'(f^{-1}(x)) = (f(f^{-1}(x)) - 1) \times \sqrt{(f(f^{-1}(x)))^2 - 2f(f^{-1}(x))} = (x-1) \times \sqrt{x^2 - 2x}$

Et comme $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, il s'ensuit que : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(x-1) \times \sqrt{x^2 - 2x}}$

Finalement : $(\forall x \in]2; +\infty[)\ ; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(x-1) \times \sqrt{x^2 - 2x}}$

Exercice 4

1) $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{2x}$:

• Ensemble de définition : $D_f = [0; +\infty[$

• Etude de la dérivabilité :

Les fonctions $u : x \mapsto (x-1)$ et $v : x \mapsto \sqrt[3]{2x}$ sont dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc la fonction $f = u \times v$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a : $f(0)=0$

et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{(x-1)\times\sqrt[3]{2x}}{x}=(x-1)\times\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^2}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^2}}=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)\times\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}}=-\infty$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$ signifie que la fonction f est non dérivable à droite en 0.

• Calculons $f'(x)$ où $x\in]0;+\infty[$:

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

Et comme $u'(x)=1$ et $v'(x)=\dfrac{2}{3\times\sqrt[3]{4x^2}}$

alors : $f'(x)=\sqrt[3]{2x}+\dfrac{2(x-1)}{3\times\sqrt[3]{4x^2}}=\dfrac{6x+2(x-1)}{3\times\sqrt[3]{4x^2}}=\dfrac{2(4x-1)}{3\times\sqrt[3]{4x^2}}$

Ainsi : $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;f'(x)=\dfrac{2(4x-1)}{3\times\sqrt[3]{4x^2}}$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x+2}$:

• Ensemble de définition : $D_f=[1;+\infty[$

• Etude de la dérivabilité :

Les fonctions $u:x\mapsto\sqrt[3]{x-1}$ et $v:x\mapsto x+2$ sont dérivables sur l'intervalle $]1;+\infty[$, donc la fonction $f=\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur $]1;+\infty[$.

• Soit x un élément de $]1;+\infty[$, on a : $f(1)=0$

et $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{1}{x+2}\times\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{(x-1)^3}}=\dfrac{1}{x+2}\times\sqrt[3]{\dfrac{1}{(x-1)^2}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\dfrac{1}{(x-1)^2}}=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x+2}\times\sqrt[3]{\dfrac{1}{(x-1)}}=+\infty$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$ signifie que la fonction f est non dérivable à droite en 1.

• Calculons $f'(x)$ où $x\in]1;+\infty[$:

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et comme $u'(x) = \dfrac{1}{3\times\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ et $v'(x) = 1$

alors : $f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}\left((x+2)\times\dfrac{1}{3\times\sqrt[3]{(x-1)^2}} - \sqrt[3]{x-1}\right)$

$= \dfrac{1}{(x+2)^2}\left(\dfrac{(x+2)-3(x-1)}{3\times\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right) = \dfrac{5-2x}{3(x+2)^2\times\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

Ainsi : $(\forall x\in\,]1;+\infty[)\,;\ f'(x) = \dfrac{5-2x}{3(x+2)^2\times\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

3) $f(x) = \dfrac{2\times\sqrt[3]{x}}{1+x\sqrt{x}}$:

• Ensemble de définition : $D_f = [0;+\infty[$

• Etude de la dérivabilité :

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ qui sont : $u: x\mapsto 2\sqrt[3]{x}$ et $v: x\mapsto 1+x\sqrt{x}$ $\left(f = \dfrac{u}{v}\right)$

• Soit $x\in\,]0;+\infty[$, on a : $f(0) = 0$

et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{2\times\sqrt[3]{x}}{x(1+x\sqrt{x})} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}(1+x\sqrt{x})}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+x\sqrt{x} = 1$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x^2}(1+x\sqrt{x}) = 0^+$,

il s'ensuit que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}(1+x\sqrt{x})} = +\infty$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ signifie que la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0.

• Calculons $f'(x)$ où $x\in\,]0;+\infty[$:

Soit $x\in\,]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$

Et comme $u'(x) = \dfrac{2}{3\times\sqrt[3]{x^2}}$ et $v'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3.\sqrt{x}}{2}$

alors : $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x\sqrt{x})^2}\times\left(\dfrac{2}{3\times\sqrt[3]{x^2}}(1+x\sqrt{x}) - 3\sqrt{x}\times\sqrt[3]{x}\right)$

$= \dfrac{1}{(1+x\sqrt{x})^2}\times\left(\dfrac{2}{3\times\sqrt[3]{x^2}}(1+x\sqrt{x}) - \dfrac{3x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$

$= \dfrac{1}{(1+x\sqrt{x})^2}\times\left(\dfrac{2+2x\sqrt{x}-9x\sqrt{x}}{3\times\sqrt[3]{x^2}}\right)$

$= \dfrac{2-7x\sqrt{x}}{3(1+x\sqrt{x})^2\times\sqrt[3]{x^2}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Ainsi : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = \dfrac{2-7x\sqrt{x}}{3(1+x\sqrt{x})^2 \times \sqrt[3]{x^2}}$

4) $f(x) = x \times \sqrt[3]{1-\dfrac{2}{x}}$:

• Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \iff x \neq 0$ et $1-\dfrac{2}{x} \geq 0$

$\iff x \neq 0$ et $\dfrac{x-2}{x} \geq 0$

$\iff x \neq 0$ et $x \in]-\infty;0[\cup [2;+\infty[$

$\iff x \in]-\infty;0[\cup [2;+\infty[$

Donc : $D_f =]-\infty;0[\cup [2;+\infty[$

• Etude de la dérivabilité :

La fonction $u : x \mapsto 1-\dfrac{2}{x}$ est dérivable et strictement positive sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]2;+\infty[$ par conséquent la fonction $\sqrt[3]{u}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]2;+\infty[$.

Donc la fonction f est dérivable en tout point de $]-\infty;0[$ et $]2;+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables.

• Soit $x \in]2;+\infty[$, on a : $f(2) = 0$

et $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{x \times \sqrt[3]{1-\dfrac{2}{x}}}{x-2} = x \times \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x}}}{\sqrt[3]{(x-2)^3}} = x \times \sqrt[3]{\dfrac{1}{x(x-2)^2}}$

Et comme : $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x(x-2)^2} = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt[3]{\dfrac{1}{x(x-2)^2}} = +\infty$

Par suite : $\lim\limits_{x \to 2^+} x \times \sqrt[3]{\dfrac{1}{x(x-2)^2}} = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$,

signifie que : f n'est pas dérivable à droite en 2.

• Calculons $f'(x)$ où $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$:

Soit $x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$, on a : $f'(x) = \sqrt[3]{1-\dfrac{2}{x}} + x \times \dfrac{\dfrac{2}{x^2}}{3 \times \sqrt[3]{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2}}$

$= \sqrt[3]{1-\dfrac{2}{x}} + \dfrac{2}{3x \times \sqrt[3]{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2}}$

$= \dfrac{3x-4}{3x \times \sqrt[3]{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Ainsi : $(\forall x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[)\ ; f'(x) = \dfrac{3x-4}{3x \times \sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x} - x$:

• Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \iff x^2+2x \geq 0$

$\iff x(x+2) \geq 0$

$\iff x \in]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$

Donc : $D_f =]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$

• Etude de la dérivabilité :

La fonction f est dérivable en tout point de $D_f - \{0;-2\}$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x^2}} - 1 = +\infty$ signifie que f n'est pas dérivable à droite en 0.

• $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x}-x+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to(-2)^-} \left(-\sqrt[3]{\dfrac{-x}{(x+2)^2}} - 1\right) = -\infty$

signifie que f n'est pas dérivable à gauche en -2.

• Calculons $f'(x)$ où $x \in D_f - \{0;-2\}$:

Soit x un élément de $D_f - \{0;-2\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x)'}{3\times\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}} - 1 = \frac{2x+2}{3\times\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}} - 1$$

Ainsi : $(\forall x \in D_f - \{0;-2\})\ ; f'(x) = \dfrac{2x+2}{3\times\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}} - 1$

6) $f(x) = (\sqrt[3]{x^2}-1)^4$:

• Ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$.

• Etude de la dérivabilité :

La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$

• $\lim\limits_{x\to 0^*} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\sqrt[3]{x^2}-1)^4-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{((\sqrt[3]{x^2}-1)^2-1)((\sqrt[3]{x^2}-1)^2+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} ((\sqrt[3]{x^2}-1)^2+1)\times\dfrac{(\sqrt[3]{x^2})^2-2\sqrt[3]{x^2}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} ((\sqrt[3]{x^2}-1)^2+1)\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2}{\sqrt[3]{x}}\right) = -\infty$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc la fonction est non dérivable à droite en 0.

• Calculons la dérivée :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f'(x) = 4(\sqrt[3]{x^2}-1)^3 \times \left(\frac{2x}{3\times\sqrt[3]{x^4}}\right) = \frac{8\times(\sqrt[3]{x^2}-1)^3}{3\times\sqrt[3]{x^4}}$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ; f'(x) = \frac{8}{3} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2}-1)^3}{\sqrt[3]{x^4}}$

7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x}}$:

• Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \iff x^2-2x > 0$

$\iff x(x-2) > 0$

$\iff x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

Donc : $D_f =]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

• Calculons $f'(x)$ où $x \in D_f$:

La fonction f est dérivable en tout point de D_f.

Soit $x \in D_f$, on a :

$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}} \times \left(\frac{2x-2}{3\times\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}\right) = -\left(\frac{2x-2}{x^2-2x}\right) \times \frac{1}{3\times\sqrt[3]{x^2-2x}}$

Ainsi : $(\forall x \in D_f)\ ; f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{x^2-2x}\right) \times f(x)$

8) $f(x) = x \times \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$:

• Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \iff x-2 \neq 0$ et $\frac{x+2}{x-2} \geq 0$

$\iff x \neq 2$ et $(x+2)(x-2) \geq 0$

$\iff x \neq 2$ et $x \in]-\infty;-2] \cup]2;+\infty[$

Donc : $D_f]-\infty;-2] \cup]2;+\infty[$

• Calcul de la dérivée :

La fonction f est dérivable en tout point de $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} + x \times \frac{\frac{-4}{(x-2)^2}}{3\times\sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} - \frac{4x}{3(x-2)^2 \times \sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2}}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$= \frac{3(x-2)^2\left(\frac{x+2}{x-2}\right)-4x}{3(x-2)^2\times\sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2}}$$

$$= \frac{3x^2-4x-12}{3(x-2)^2\times\sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2}}$$

Ainsi : $(\forall x\in D_f-\{-2\})\,;\, f'(x)=\dfrac{3x^2-4x-12}{3(x-2)^2\times\sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2}}$

Exercice 5

1) a- Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons $f'(x)$

On a : $f(x)=2x^4-4x^3+9x^2-4x+1$

La fonction f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynômiale.

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\, f'(x)=8x^3-12x^2+18x-4=2(4x^3-6x^2+9x-2)$

b) Montrons que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

- La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme
- $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\, f''(x)=2(12x^2-12x+9)=6(4x^2-4x+3)$

Puisque le discriminant du trinôme $4x^2-4x+3$ est -32 et $a=4$ alors $4x^2-4x+3>0$ pour tout réel x

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\, f''(x)>0$

Par suite la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Ainsi la fonction f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle

$J=f'(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\,;\,\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right[=\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}8x^3=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}8x^3=-\infty$

- Déduisons que : $(\exists!\alpha\in\mathbb{R})\,/\,f'(\alpha)=0$

Comme f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $0\in\mathbb{R}$

alors il existe un unique réel α tel que $f'(\alpha)=0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

c) Dressons le tableau de variations de f :

• Déterminons le signe de $f'(x)$ où $x \in \mathbb{R}$

Puisque la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(\alpha) = 0$ alors on aura : $x < \alpha \Rightarrow f'(x) < f'(\alpha)$

$\Rightarrow f'(x) < 0$

Et $x > \alpha \Rightarrow f'(x) > f(\alpha)$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

• On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} 2x^4 = +\infty$

Ainsi le tableau de variations de la fonction f est :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	
f	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

2)

a- Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)f'(x) + \left(3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)$

Soit x un réel, on a :

$$\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)f'(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)(2(4x^3 - 6x^2 + 9x - 2))$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^3 - 6x^2 + 9x - 2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4x^4 - 8x^3 + 12x^2 - \frac{13}{2}x + 1\right) = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)f'(x) + \left(3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right) = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{1}{2} + 3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$= 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 = f(x)$$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)f'(x) + \left(3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)$

b- Montrons que : $f(\alpha) > 0$

D'après la question précédente, on a

For more visit: L9ray.com CamScanner

$f(\alpha)=\left(\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{8}\right)f'(\alpha)+\left(3\alpha^2-\frac{3}{4}\alpha+\frac{1}{2}\right)$

or $f'(\alpha)=0$, donc $f(\alpha)=3\alpha^2-\frac{3}{4}\alpha+\frac{1}{2}$

Puisque le discriminant du trinôme $3x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ est $-\frac{87}{16}$ et $a=3$

alors $3x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}>0$ pour tout réel x

Ainsi : $3\alpha^2-\frac{3}{4}\alpha+\frac{1}{2}>0$, c'est-à-dire : $f(\alpha)>0$

c) Déduction :

$f(\alpha)$ est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$ signifie : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)\geqslant f(\alpha)$

or $f(\alpha)>0$, donc : $(\forall x\in\mathbb{R}),\ f(x)>0$

V Dérivée de la fonction Arctangente

- La fonction $Arc\,tan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$(\forall x\in\mathbb{R})\,;(Arc\,tan)'(x)=\frac{1}{x^2+1}$

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $f: x\longmapsto Arc\tan(u(x))$ est dérivable sur I et on a :

$(\forall x\in I)\,;f'(x)=\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

Exercices

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants; étudier la dérivablité de la fonction f après avoir déterminé D son ensemble de définition, puis déterminer l'expression de sa dérivée.

1) $f(x)=x\times Arc\tan(\sqrt{x})$

2) $f(x)=\frac{Arc\tan x}{\sqrt{x}}$

3) $f(x)=\sqrt[3]{Arc\tan x}$

4) $f(x)=Arc\tan\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé D son ensemble de définition, et en déduire une simplification de l'expression de $f(x)$ pour tout réel x de D :

1) $f(x) = Arc\tan(\sqrt{1+x^2} - x)$

2) $f(x) = Arc\tan\left(\frac{2x+1}{2-x}\right)$

3) $f(x) = Arc\tan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + Arc\tan\left(\frac{2-x}{x\sqrt{3}}\right)$

4) $f(x) = Arc\tan\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$

Exercice 8

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$f(x) = Arc\tan\left(\frac{x-1}{x}\right) - Arc\tan\left(\frac{x}{1+x}\right)$

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

2) a) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de D.

b) En déduire que : $(\forall x \in]-1;0[)\ ; f(x) = Arc\tan(2x^2) + \frac{\pi}{2}$

et $(\forall x \in]-\infty;-1[\cup]0;-\infty[)\ ; f(x) = Arc\tan(2x^2) - \frac{\pi}{2}$

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;1[$ par :

$$f(x) = 2x + \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

1) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $]-1;1[$ sur un ensemble J à préciser.

b) Déterminer $f''(x)$ pour tout réel x de $]-1;1[$.

2) On pose $g = f^{-1}$ où f^{-1} est la bijection réciproque de la fonction f.

a) Montrer que la fonction g est deux fois dérivable sur J.

b) Calculer chacun des nombres suivants : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $g'(2)$ et $g''(2)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\frac{1}{Arc\tan(x)}$$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$ et que : $1<\alpha<\sqrt{3}$

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que : $(f^{-1})'(0)=\frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha^2}$

Solutions

Exercice 6

1) $f(x)=x\times Arc\tan(\sqrt{x})$

• $D=[0;+\infty[$

• La fonction $u: x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc la fonction Arctan ou est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

• Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=Arc\tan(\sqrt{x})+x\times\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}=Arc\tan(\sqrt{x})+\frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$=Arc\tan(\sqrt{x})+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$$

Ainsi : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ f'(x)=Arc\tan(\sqrt{x})+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$

2) $f(x)=\frac{Arc\tan x}{\sqrt{x}}$:

• $D=]0;+\infty[$

• La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ à savoir : $x\longmapsto Arc\tan x$ et $x\longmapsto\sqrt{x}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Soit $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} - \frac{Arc\tan x}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2x-(1+x^2)Arc\tan x}{2x\sqrt{x}(1+x^2)}$$

Ainsi : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; f'(x) = \dfrac{2x-(1+x^2)Arc\tan x}{2x\sqrt{x}(1+x^2)}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{Arc\tan x}$:

• Soit x un réel, on a : $x \in D \iff Arc\tan x \geqslant 0$

$\iff x \geqslant 0$

$\iff x \in [0;+\infty[$

Donc : $D = [0;+\infty[$

• La fonction $x \longmapsto Arc\tan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et $Arc\tan x > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$, il s'ensuit que la fonction $f: x \longmapsto \sqrt[3]{Arc\tan x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$,

et on a : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{3\times\sqrt[3]{(Arc\tan x)^2}}$

$= \dfrac{1}{3(1+x^2)\times\sqrt[3]{(Arc\tan x)^2}}$

4) $f(x) = Arc\tan(\sqrt[3]{(x+2)^2})$:

• $D = \mathbb{R}$

• La fonction $u: x \longmapsto (x+2)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur les intervalles $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Par suite la fonction $v : x \longmapsto \sqrt[3]{u(x)}$ est dérivable sur les deux intervalles $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$

Il s'ensuit que la fonction $f = Arc\tan ov$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}\ ; f(x) = \dfrac{v'(x)}{1+(v(x))^2}$

Et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}\ ; v'(x) = \dfrac{2(x+2)}{3\sqrt[3]{(x+2)^4}}$

et $1+(v(x))^2 = 1+\sqrt[3]{(x+2)^4}$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\})\ ; f'(x) = \dfrac{2(x+2)}{3.\sqrt[3]{(x+2)^4}\times(1+\sqrt[3]{(x+2)^4})}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 7

1) $f(x) = Arc\tan(\sqrt{1+x^2} - x)$:

• Déterminons D

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff 1 + x^2 \geqslant 0$

$\iff x \in \mathbb{R}$

Donc: $D = \mathbb{R}$

• Déterminons la dérivée de f :

La fonction $u : x \longmapsto \sqrt{1+x^2} - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f = Arc\tan$ ou est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \dfrac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

Donc :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+(1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2)}$$

$$= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{2(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{2(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}-x)}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2}$$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+x^2}$

• Simplifions l'expression de $f(x)$:

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \left(-\frac{1}{2} Arc\tan x\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = f'(x)$,

donc : $(\exists c \in \mathbb{R}) / (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = -\frac{1}{2} . Arc\tan(x) + c$

et on a : $f(0) = Arc\tan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $c = \dfrac{\pi}{4}$

Finalement : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = -\frac{1}{2} Arc\tan(x) + \frac{\pi}{4}$

2) $f(x) = Arc\tan\left(\dfrac{2x+1}{2-x}\right)$

• Déterminons D :

$x \in D \iff x \in \mathbb{R}$ et $2 - x \neq 0$

$\iff x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 2$

$\iff x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Donc : $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

• Déterminons la dérivée de f

For more visit: L9ray.com CamScanner

la fonction f est dérivable en tout point de D, en plus on a :

$$(\forall x \in D)\,; f'(x) = \frac{\frac{5}{(2-x)^2}}{1+\left(\frac{2x+1}{2-x}\right)^2} = \frac{5}{(2-x)^2} \times \frac{(2-x)^2}{5(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

• Simplification de l'expression de $f(x)$

On a : $(\forall x \in D)\,; f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (Arc\tan)'(x)$

donc : $(\exists c_1 \in \mathbb{R})/(\forall x \in]-\infty;2[)\,; f(x) = Arc\tan(x) + c_1$

$(\exists c_2 \in \mathbb{R})/(\forall x \in]2;+\infty[)\,; f(x) = Arc\tan(x) + c_2$

et puisque : $\lim\limits_{|x|-+\infty} f(x) = Arc\tan(-2) = -Arc\tan(2)$

Alors : $c_1 = \frac{\pi}{2} - Arc\tan(2) = Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right)$

et $c_2 = -\frac{\pi}{2} - Arc\tan(2) = -\pi + Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right)$

Finalement : $\begin{cases}(\forall x \in]-\infty;2[)\,; f(x) = Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right)\\(\forall x \in]2;+\infty[)\,; f(x) = Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right) - \pi\end{cases}$

3) $f(x) = Arc\tan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + Arc\tan\left(\frac{2-x}{x\sqrt{3}}\right)$

• $D = \mathbb{R}^*$

• La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$,

Soit x un réel non nul, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3x^2}}{1+\left(\frac{2-x}{x\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4x^2-4x+4} - \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4x^2-4x+4} = 0$$

Par suite : $\begin{cases}(\exists c_2 \in \mathbb{R})/(\forall x \in]0;+\infty[)\,; f(x) = c_1\\(\exists c_2 \in \mathbb{R})/(\forall x \in]-\infty;0[)\,; f(x) = c_2\end{cases}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = Arc\tan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$

et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = Arc\tan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3}$

alors $c_1 = \frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Ainsi : $\begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{3} & \text{si } x \in]0;+\infty[\\ f(x) = -\frac{2\pi}{3} & \text{si } x \in]-\infty;0[\end{cases}$

4) $f(x) = Arc\tan\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$

• Déterminons D :

Soit x un réel on a : $x \in D \iff x^2+2x-1 \neq 0$

$\iff (x+1)^2 \neq 2$ et $x \neq -1-\sqrt{2}$

$\iff x \neq -1+\sqrt{2}$

$\iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-1-\sqrt{2}\,;-1+\sqrt{2}\}$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{-1-\sqrt{2}\,;-1+\sqrt{2}\}$

• Déterminons la dérivée de f :

La fonction f est dérivable en tout point de D,

soit x un élément D, on pose : $u(x) = \frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$

On a : $u'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+2x-1)-(2x+2)(x^2-2x-1)}{(x^2+2x-1)^2}$

$= \frac{4(x^2+1)}{(x^2+2x-1)^2}$

Donc : $f'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

$= \frac{4(x^2+1)}{(x^2+2x-1)^2} \times \frac{(x^2+2x-1)^2}{(x^2+2x-1)^2+(x^2-2x-1)^2}$

$= \frac{2}{1+x^2}$

Ainsi : $(\forall x \in D)\,;\, f'(x) = 2 \times \frac{1}{1+x^2}$

• Simplification de l'expression de $f(x)$

On a : $(\forall x \in D)\,;\, f'(x) = (2Arc\tan)'(x)$

donc : $\begin{cases} (\exists c_1 \in \mathbb{R})/(\forall x \in]-\infty;-1-\sqrt{2}[)\,;\, f(x) = 2Arc\tan(x) + c_1 \\ (\exists c_2 \in \mathbb{R})/(\forall x \in]-1-\sqrt{2}\,;-1+\sqrt{2}[)\,;\, f(x) = 2Arc\tan(x) + c_2 \\ (\exists c_3 \in \mathbb{R})/(\forall x \in]-1+\sqrt{2}\,;+\infty[)\,;\, f(x) = 2Arc\tan(x) + c_3 \end{cases}$

Et on a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan x = -\frac{\pi}{2}$

donc : $c_1 = \frac{5\pi}{4}$ et $c_3 = -\frac{3\pi}{4}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et on a : $f(0)=\frac{\pi}{4}$ et $Arc\tan(0)=0$, donc : $c_2=\frac{\pi}{4}$

Finalement :

$$\begin{cases}(\forall x\in\,]-\infty;-1-\sqrt{2}[\,);\ f(x)=2Arc\tan(x)+\frac{5\pi}{4}\\(\forall x\in\,]-1-\sqrt{2}\,;-1+\sqrt{2}[\,);\ f(x)=2Arc\tan(x)+\frac{\pi}{4}\\(\forall x\in)]-1+\sqrt{2}\,;+\infty[\,;\ f(x)=2Arc\tan(x)-\frac{3\pi}{4}\end{cases}$$

Exercice 8

1) a- Déterminons D l'ensemble de définition de f :

Soit x un réel, on a : $f(x)=Arc\tan\left(\frac{x-1}{x}\right)-Arc\tan\left(\frac{x}{1+x}\right)$

donc : $x\in D\iff x\neq 0$ et $1+x\neq 0$

$\iff x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\iff x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$

D'où : $D=\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$

b- Calculons les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$ et comme

la fonction $Arc\tan$ est continue en 1 alors :

$$\lim_{x\to+\infty}Arc\tan\left(\frac{x-1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}Arc\tan\left(\frac{x}{x+1}\right)=Arc\tan(1)=\frac{\pi}{4}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}Arc\tan\left(\frac{x-1}{x}\right)-Arc\tan\left(\frac{x}{1+x}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x}-1\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}Arc\tan\left(\frac{x-1}{x}\right)=Arc\tan(1)=\frac{\pi}{4}$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}Arc\tan\left(\frac{x}{1+x}\right)=\frac{\pi}{4}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}Arc\tan\left(\frac{x-1}{x}\right)-Arc\tan\left(\frac{x}{1+x}\right)=0$ C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

- $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to0^-}Arc\tan\left(\frac{x}{1+x}\right)=Arc\tan(0)=0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et on a : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} Arc\tan(X)=\dfrac{\pi}{2}$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^-} Arc\tan\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

Par suite $\lim\limits_{x\to 0^-} Arc\tan\left(\dfrac{x-1}{x}\right)-Arc\tan\left(\dfrac{x}{1+x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$

2) a- Déterminons $f'(x)$ où $x\in D$

La fonction f est dérivable en tout point de l'ensemble D

Soit x un élément de D, on pose : $u(x)=\dfrac{x-1}{x}$ et $v(x)=\dfrac{x}{1+x}$

alors $f(x)=Arc\tan(u(x))-Arc\tan(v(x))$

Donc : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}-\dfrac{v'(x)}{1+(v(x))^2}$

On a : $u'(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)'=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x^2}$

et $v'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{(1+x)^2}=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

Puisque : $1+(u(x))^2=1+\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2=\dfrac{x^2+x^2-2x+1}{x^2}=\dfrac{2x^2-2x+1}{x^2}$

$1+(v(x))^2=1+\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2=\dfrac{2x^2+2x+1}{(1+x)^2}$

Alors : $\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}=\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{x^2}{2x^2-2x+1}=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}$

et $\dfrac{v'(x)}{1+(v(x))^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}\times\dfrac{(1+x)^2}{2x^2+2x+1}=\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$

Donc : $f'(x)=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}-\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$

Ainsi : $(\forall x\in D)\,;\,f'(x)=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}-\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$

b) Déduction :

Soit $x\in D$, on a : $f'(x)=\dfrac{1}{2x^2+1-2x}-\dfrac{1}{2x^2+1+2x}$

$=\dfrac{2x^2+1+2x-2x^2-1+2x}{(2x^2+1+2x)(2x^2+1-2x)}=\dfrac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2}$

$=\dfrac{4x}{1+4x^4}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = Arc\tan(2x^2)$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})\ ; h'(x) = (Arc\tan(2x^2))' = \dfrac{(2x^2)'}{1+(2x^2)^2} = \dfrac{4x}{1+4x^4}$

Par suite les fonctions f et h sont dérivables en tout point de D

et on a : $(\forall x \in D)\ , f('x) = h'(x)$

Par conséquent :

- $(\exists c_1 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]-\infty; -1[)\ ; f(x) = h(x) + c_1$
- $(\exists c_2 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]-1; 0[)\ ; f(x) = h(x) + c_2$
- $(\exists c_3 \in \mathbb{R}) / (\forall x \in]0; +\infty[)\ ; f(x) = h(x) + c_3$

Déterminons les constantes c_1 , c_2 et c_3 :

On a : $(\forall x \in]-\infty; -1[)\ ; f(x) = h(x) + c_1$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(h(x) + c_1) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) + c_1$

or $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan(2x^2) = \dfrac{\pi}{2}$

d'où $c_1 = -\dfrac{\pi}{2}$

de même on a : $\forall x \in]0; +\infty[\ ; f(x) = h(x) + c_3$

alors $c_3 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - h(x)$ donc : $c_3 = -\dfrac{\pi}{2}$

Ainsi : $(\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[)\ ; f(x) = Arc\tan(2x^2) - \dfrac{\pi}{2}$

D'autre part : on a : $(\forall x \in]-1; 0[)\ ; f(x) = h(x) + c_2$

donc : $c_2 = \lim\limits_{x\to0^-}(f(x) - h(x))$

or : $\lim\limits_{x\to0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to0^-} Arc\tan(2x^2) = Arc\tan(0)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ d'où $c_2 = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 9

1) a- Montrons que f est une bijection de $]-1;1[$ sur J :

- Continuité de f :

La fonction $u : x \longmapsto \dfrac{\pi}{2}x$ est continue sur $]-1;1[$ et $u(]-1;1[) =]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$

et la fonction tan est continue sur $]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$, donc la fonction

$x \longmapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) = (\tan o\ u)(x)$ est continue sur $]-1;1[$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Par suite la fonction f est continue sur $]-1;1[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $]-1;1[$ à savoir : $x \longmapsto \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ et $x \longmapsto 2x$.

• Stricte monotonie de f :

On a : $(\forall x \in]-1;1[) ; f'(x) = 2 + \frac{\pi}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{2}x\right)$

Donc : $(\forall x \in]-1;1[) ; f'(x) > 0$

D'où la fonction f est strictement croissante sur $]-1;1[$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection réciproque, la fonction f réalise une bijection de $]-1;1[$ sur $J = f(]-1;1[) =]\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) ; \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)[= \mathbb{R}$,

car : $\lim\limits_{x\to -1^+} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{X\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(X) = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to 1^-} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{X\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(X) = +\infty$ (on pose : $X = \frac{\pi}{2}x$)

Finalement f réalise une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$

b- Déterminons $f''(x)$ pour $x \in]-1;1[$:

On a : $(\forall x \in]-1;1[) ; f'(x) = 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Donc : $(\forall x \in]-1;1[) ; f''(x) = \frac{\pi}{2}\left(2\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \times \left(\frac{\pi}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right)\right.$

$$= \left(\frac{\pi^2}{2}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \times \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$$

2) Montrons que la fonction g est deux fois dérivable sur $J = \mathbb{R}$

On a : $g = f^{-1}$

Puisque la fonction f est dérivable sur $]-1;1[$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]-1;1[$, telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout réel de $]-1;1[$

alors la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

C'est-à-dire : $g' = \frac{1}{f' o f^{-1}} = \frac{1}{f' o g}$

Par suite montrons que la fonction $f' o g$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ pour déduire que g' est dérivable sur $\mathbb{R}$

On a : la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $g(\mathbb{R}) =]-1;1[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et la fonction f' est dérivable sur $]-1;1[$ par suite la fonction $f'og$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en plus $f'og(x) \neq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

D'où : $g' = \frac{1}{f'og}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Finalement la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

b) Calculons : $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $g'(2)$ et $g''(2)$

On a : • $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$ et $g(2) = \frac{1}{2}$

• $g'(2) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}$ or $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + \pi$

Donc : $g'(2) = \frac{1}{2+\pi}$

• On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; g''(x) = \frac{-(f''(g(x)) \times g'(x))}{(f'(g(x)))^2}$

Par suite : $g''(2) = \frac{-f''\left(\frac{1}{2}\right) \times g'(2)}{\left(f'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}$

or : $f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} \times 1 \times (1+1) = \pi^2$ et $g'(2) = \frac{1}{2+\pi}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \pi$

Donc : $g''(2) = -\frac{\pi^2}{4(2+\pi)^3}$

Exercice 10

1) Dressons le tableau de variations de la fonction f :

On a : • $\lim\limits_{x \to 0^+} Arc\tan x = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{Arc\tan x} = +\infty$

alors $\lim\limits_{x \to 0^+} x - \frac{1}{Arc\tan x} = -\infty$, c'est- à-dire : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} Arc\tan x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{Arc\tan x} = \frac{2}{\pi}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \frac{1}{Arc\tan x} = +\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et on a :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{1+x^2}}{(Arc\tan x)^2} = 1 + \frac{1}{(1+x)^2(Arc\tan x)^2}$$

• On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Par suite le tableau de variations de f est :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) Montrons que : $(\exists!\alpha \in]0;+\infty[) / f(\alpha) = 0$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Donc, d'après le théorème de la fonction réciproque,

la fonction f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur

$f(]0;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

Et comme : $0 \in \mathbb{R}$ donc : $(\exists!\alpha \in]0;+\infty[) : f(\alpha) = 0$

• Montrons que : $1 < \alpha < \sqrt{3}$

On a : $f(1) = 1 - \dfrac{1}{Arc\tan(1)} = 1 - \dfrac{4}{\pi} = \dfrac{\pi - 4}{\pi}$ et $\pi - 4 < 0$

Alors $f(1) < 0$

et on a : $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} - \dfrac{1}{Arc\tan(\sqrt{3})} = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$ et $\sqrt{3} > \dfrac{\pi}{3}$

alors $f(\sqrt{3}) > 0$

Par suite : $f(1) < 0 < f(\sqrt{3})$ c'est-à-dire : $f(1) < f(\alpha) < f(\sqrt{3})$

Et puisque la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

alors : $1 < \alpha < \sqrt{3}$

3) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} :

On a f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b- Montrons que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et $f'(x) \neq 0$

pour tout réel x de $]0;+\infty[$, donc la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R} = f(]0;+\infty[)$

c - Montrons que $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1+\alpha^2}{1+2\alpha^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $f(\alpha)=0$ alors $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(\alpha)}$ or : $f'(\alpha)=1+\dfrac{1}{(1+\alpha^2)(Arc\tan(\alpha))^2}$

Et on a : $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{Arc\tan\alpha}$

$\Leftrightarrow Arc\tan\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$

Donc : $(1+\alpha^2)(Arc\tan\alpha)^2=(1+\alpha^2)\times\dfrac{1}{\alpha^2}=\dfrac{1+\alpha^2}{\alpha^2}$

Par suite $f'(\alpha)=1+\dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^2}=\dfrac{1+2\alpha^2}{1+\alpha^2}$

Ainsi : $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1+\alpha^2}{1+2\alpha^2}$

VI Théorème de Rolle

Si une fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$ (ou segment $[a;b]$) et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et $f(a)=f(b)$, alors il existe au moins un élément c de $]a;b[$ tel que : $f'(c)=0$

VII Théorème des accroissements finis

Si une fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, alors il existe au moins un élément c de $]a;b[$ tel que : $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

VIII Inégalité des accroissements finis

Propriété 1:

Si f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ et s'il existe deux nombres réels m et M tels que : $m<f'(x)\leqslant M$ pour tout x de $[a;b]$, alors : $m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant M(b-a)$

Propriété 2:

Si f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ et s'il existe un réel positif k tel que : $(\forall x\in[a;b]);|f'(x)|\leqslant k$

alors : $(\forall(x;y)\in[a;b]^2):|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

Exercices

Exercice 11

1) a) Montrer que : $(\forall x \in [0;+\infty[) ; -\frac{x^3}{3} \leq Arc\tan(x) - x \leq -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2} = 0$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2} = -1$

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

Montrer que : $(\exists c \in]0;1[) ; 2c\, f'(c) = \sqrt{c}$

Exercice 13

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que : $f(0) \neq f(1)$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]0;1[$

Montrer que : $(\exists! c \in]0;1[) ; f(0) - f(1) = 2\, f(c)$

Exercice 14

Soit a, b et c des nombres réels donnés non tous nuls.

Montrer que l'équation : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0 ; x \in \mathbb{R}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0;1[$.

Exercice 15

1) a) Soit a et b des réels tels que : $0 \leq a < b$

Montrer que : $\frac{1}{1+b^2} < \frac{Arc\tan(b) - Arc\tan(a)}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$

b) En déduire que : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; \frac{1}{1+x^2} < \frac{Arc\tan(x)}{x} < 1$

2) Application :

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{Arc\tan(x)}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$, puis étudier sa dérivabilité en $x_0 = 0$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = (x-1)^2 \times Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$
Etudier la nature des branches infinies de la courbe de la fonction g au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 16

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

1) $(\forall x \in]-\infty;0[) ; Arc\tan(x) < \frac{x}{1+x^2}$

2) $\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\tan b - \tan a}{b-a} < \frac{1}{\cos^2 b}$ où a et b sont deux réels tels que :

$$0 < a < b < \frac{\pi}{2}$$

3) $(\forall (x;y) \in ([0;10])^2) ; |x\cos x - y\cos y| \leq 11 \times |x-y|$

4) $(\forall x \in]0;1[) ; |f(x) - f(y)| < \frac{1}{4\cos^2(1)} \times |x-y|$ où $f(t) = \frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{1+t}\right)$

5) $(\forall (x;y) \in (]0;2[)^2) ; |g(x) - g(y)| < \frac{\sqrt{2}}{12}|x-y|$ où $g(t) = Arc\tan(\sqrt{t+2})$

Exercice 17

1) Enoncer le théorème des accroissements finis.

2) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) ; 1 < \frac{\tan(x)}{x} < 1 + \tan^2(x)$, en appliquant le théorème des accroissements finis.

Exercice 18

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que : $f(0) = 0$ et la fonction f' est décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f(x) \geq x\, f'(x)$

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$
Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ par :

$$f(x) = 2x + \sin(x) - \cos(x)$$

1) Montrer que : $\left(\exists! \alpha \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right) / f(\alpha) = \alpha$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right);|f'(x)| \leq 4$

3) Montrer que : $\left(\exists! \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right) / |f(x) - \alpha| \leq \pi$

Exercice 20

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telles que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 4$$

Montrer que : $(\exists c \in]0;1[) / \sqrt[4]{c^3} \times f'(c) = 1$

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - x + Arc\tan(x)$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Montrer que le point $I(0;1)$ est un centre de symétrie de (C).

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $2 < \alpha < \frac{5}{2}$

3) a) Etudier les branches infinies de la courbe (C).

b) Tracer la courbe (C).

4) a) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{1\}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}); 1 + (f^{-1})'(x) + \frac{1}{(f^{-1}(x))^2} = 0$

b) Montrer que : $\left(\exists c \in \left]\frac{\pi}{4};1\right[\right); \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)\left(1 + \frac{1}{(f^{-1}(c))^2}\right) = -1$

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} ; \ \dfrac{\pi}{4} \leq x < \dfrac{\pi}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

2) Montrer que : $-2 \leq f'(x) \leq -1$ pour tout réel x de $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) En déduire que : $\frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1-\tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x$ pour tout réel x de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $[0;1]$.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de $[0;1]$.

Exercice 23

1) a et b deux réels tels que : $a < b$

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$ telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]a;b[$.

a) Montrer que : $g(a) \neq g(b)$

b) En considérant la fonction φ définie sur $[a;b]$ par :

$$\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \times (g(x)-g(a)) - (f(x)-f(a))$$

Montrer que : $(\exists c \in]a;b[) ; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

2) Application :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x-Arc\tan(x)}{x^3}\right)$

Exercice 24

a et b deux nombres réels avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle $[a;b[$ telle que :

$f(a) = f(b) = 0$ et $f'_d(a) = 0$

Montrer que : $(\exists c \in]a;b[) ; f'(c) = \frac{f(c)}{c-a}$

Exercice 25

n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur l'intervalle $]0;1[$ telle que :

$f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

Montrer que : $(\exists (a;b;c) \in (]0;1[)^3) ; f'(a) \times f'(b) = \frac{1-c^n}{1-c} \times c^{n-1}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 26

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telle que :
$(\exists \alpha \in]0;+\infty[);(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) \geq \alpha$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$

2) Montrer que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note : g la bijection réciproque de l'application f'.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xg(x) - f(g(x))$

Montrer que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g'(x)$ pour tout réel x.

Exercice 27

Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$.

Soit f une fonction numérique continue sur le segment $[a;b]$ et deux fois dérivable sur l'intervalle $]a;b[$ telle que : $f(a) = f(b) = 0$ et $f''(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]a;b[$.

Montrer que : $(\forall x \in]a;b[) ; f(x) \neq 0$

Exercice 28

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} F(x) = f\left(\frac{1}{x} - 1\right) ; 0 < x \leq 1 \\ F(0) = f(0) \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - 1$ réalise une bijection de l'intervalle $]0;1]$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2) a) Montrer que la fonction F est continue sur $[0;1]$.

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]0;1[$.

3) Montrer que : $(\exists c \in]0;+\infty[) / f'(c) = 0$

4) On suppose que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ pour tout réel $x > 0$.

Montrer que le réel c est unique.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 11

1) a- Montrons que : $(\forall x \geqslant 0) ; -\frac{x^3}{3} \leqslant Arc\tan(x) - x \leqslant -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

On considère la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$

par $\varphi(x) = x - Arc\tan(x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

La fonction φ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a :

$(\forall x \in [0; +\infty[) ; \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} - x^2 + x^4 = \frac{x^6}{1+x^2}$

Par suite : $(\forall x \geqslant 0) ; \varphi'(x) \geqslant 0$, il s'ensuit que la fonction φ est croissante sur $[0; +\infty[$. Donc : $(\forall x \geqslant 0) ; \varphi(x) \geqslant \varphi(0)$

C'est-à-dire : $\forall x \in [0; +\infty[; \varphi(x) \geqslant 0$ donc

$(\forall x \in [0; +\infty[) ; x - Arc\tan x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \geqslant 0$

Ainsi : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; Arcan(x) - x \leqslant -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

D'autre part, on considère la fonction ψ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$\psi(x) = Arc\tan(x) - x + \frac{x^3}{3}$

La fonction ψ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et de plus :

$(\forall x \in [0; +\infty[) ; \psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2}$

Par suite $\psi'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$

Par conséquent la fonction ψ est croissante sur $[0; +\infty[$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \psi(x) \geqslant \psi(0)$

C'est-à-dire : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \psi(x) \geqslant 0$

Ainsi : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; -\frac{x^3}{3} \leqslant Arc\tan(x) - x$

Finalement : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; -\frac{x^3}{3} \leqslant Arc\tan(x) - x \leqslant -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

b) Déduisons : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2}$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, ona : $-\frac{x^3}{3} \leqslant Arc\tan(x) - x \leqslant -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

équivaut à : $-\frac{x}{3} \leqslant \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2} \leqslant -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\begin{cases} (\forall x > 0) ; -\frac{x}{3} \leqslant \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2} \leqslant -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5} \\ \lim\limits_{x \to 0^+}\left(-\frac{x}{3}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(-\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5}\right) = 0 \end{cases}$

D'après le théorème de la limite par encadrement : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2} = 0$

Calculons $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2}$

On pose : $X = -x$ on a : $x = -X$ et $X \to 0^+ \iff x \to 0^-$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2} = \lim\limits_{X \to 0^+} \frac{Arc\tan(-X) - (-X)}{(-X)^2}$

$= \lim\limits_{X \to 0^+} -\frac{Arc\tan X - X}{X^2}$

$= 0$ (d'après le résultat précédent)

D'où : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2} = 0 \end{cases}$

Par suite : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2} = 0$

2) Montrons que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2} = -1$

Soit x un élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $x \neq 0$, on a :

$$\frac{Arc\tan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \left[\frac{Arc\tan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{x}{x+1} - x}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \times \frac{x^2}{(x+1)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} \times \left[\frac{Arc\tan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{x}{x+1}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} - (x+1) \right]$$

On pose : $t = \frac{x}{x+1}$, on a : x tend vers 0 équivaut à t tend vers 0

Donc : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{x}{x+1}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{Arc\tan(t) - t}{t^2} = 0$

et on a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{(x+1)^2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} (-(x+1)) = -1$

Par conséquent : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2} = 1 \times (0 - 1) = -1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

Exercice 12

Montrons que : $(\exists c \in]0;1[) : 2cf'(c) = \sqrt{c}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = f(x) - \sqrt{x}$

On a : La fonction f est continue sur $[0;1]$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;1]$, donc la fonction g est continue sur $[0;1]$

- La fonction f est dérivable sur $]0;1[$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;1[$, donc la fonction g est dérivable sur $]0;1[$.
- $g(0) = g(1) = 0$, car $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

D'après le théorème de Rolle : $(\exists c \in]0;1[) / g'(c) = 0$

Puisque : $(\forall x \in]0;1[) ; g'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x) - \dfrac{\sqrt{x}}{2x}$

alors : $g'(c) = 0 \Longleftrightarrow f'(c) - \dfrac{\sqrt{c}}{2c} = 0$

$\Longleftrightarrow 2cf'(c) = \sqrt{c}$

Ainsi : $(\exists c \in]0;1[) / 2cf'(c) = \sqrt{c}$

Exercice 13

Montrons que : $(\exists! c \in]0;1[) / f(0) - f(1) = 2f(c)$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = 2f(x) - f(0) - f(1)$

On a : la fonction f est continue sur $[0;1]$, donc la fonction g est continue sur le segment $[0;1]$.

Et on a : $g(0) \times g(1) = (f(0) - f(1)) \times (f(1) - f(0)) = -(f(0) - f(1))^2$

Puisque $f(0) \neq f(1)$ alors $-(f(0) - f(1))^2 < 0$, c'est-à-dire : $g(0) \times g(1) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0;1[$, signifie que : $(\exists c \in]0;1[) / 2f(c) = f(0) - f(1)$

- Montrons que le réel c est unique :

En utilisant un raisonnement par l'absurde :

On suppose que : $(\exists c' \in]0;1[) / g(c') = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

où $c < c'$ par exemple.

On a : La fonction g est continue sur le segment $[c;c']$, et dérivable sur l'intervalle $]c,c'[$ et $g(c) = g(c') = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle : $(\exists \alpha \in]c;c'[) / g'(\alpha) = 0$

Et puisque : $(\forall x \in]0;1[) ; g'(x) = 2f'(x)$ et $\alpha \in]0;1[$

alors : $(\exists \alpha \in]0;1[) / f'(\alpha) = 0$

Ce qui est contradictoire avec : $(\forall x \in]0;1[) ; f'(x) \neq 0$

Par conséquent le réel $c \in]0;1[$ est unique.

Finalement : $(\exists! c \in]0;1[) / f(0) - f(1) = 2f(c)$

Exercice 14

Montrons que l'équation : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0$ admet au moins un solution dans $]0;1[$:

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par :
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$

• On a : la fonction f est continue sur $[0;1]$, car f est la restriction de la fonction polynôme $x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$

• La fonction f est dérivable sur $]0;1[$, car c'est la restriction d'une fonction polynôminale.

• $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$, c'est-à-dire : $f(1) = f(0) = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle : $(\exists x_0 \in]0;1[) / f'(x_0) = 0$

Or : $(\forall x \in]0;1[) ; f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c)$

Donc : $(\exists x_0 \in]0;1[) / 4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 - (a+b+c) = 0$

c'est-à-dire : l'équation $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0 ; x \in \mathbb{R}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0;1[$.

Exercice 15

1) a) Montrons que: $\frac{1}{1+b^2} < \frac{Arc\tan(b) - Arc\tan(a)}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$

a et b étant deux réels tels que: $0 \leq a < b$

La fonction $Arc\tan$ est continue $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, donc d'après le théorème des accroissements finis:

$(\exists c \in]a;b[) ; Arc\tan(b) - Arc\tan(a) = (b-a)(Arc\tan)'(c)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Comme: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(Arc\tan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

alors: $(\exists c \in]a;b[)$; $\frac{Arc\tan(b) - Arc\tan(a)}{b-a} = \frac{1}{1+c^2}$

Et on a: $0 \leq a < c < b \Rightarrow 0 < 1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$$

Ainsi: $\frac{1}{1+b^2} < \frac{Arc\tan(b) - Arc\tan(a)}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$

b) Déduction:

Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$

On prend: $a = 0$ et $b = x$, en utilisant l'inégalité précédente

On a: $\frac{1}{1+x^2} < \frac{Arc\tan x}{x} < 1$

Ainsi: $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\frac{1}{1+x^2} < \frac{Arc\tan x}{x} < 1$

2) Application:

a) * Etude de la continuité de f en 0:

On a:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Arc\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{Arc\tan x - Arc\tan 0}{x-0} = (Arc\tan)'(0) = 1$$

Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ signifie que f est continue en 0.

* Etude de la dérivabilité de f en 0:

Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left(\frac{Arc\tan x}{x} - 1\right) = \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2}$$

Puisque $\frac{1}{1+x^2} < \frac{Arc\tan x}{x} < 1$ alors $\frac{x}{1+x^2} < Arc\tan x < x$

Donc: $\frac{-x}{1+x^2} < \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2} < 0$

Par suite: $\begin{cases} (\forall x \in]0;+\infty[) \\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-x}{1+x^2}\right) = 0 \end{cases}$; $\frac{-x}{1+x^2} < \frac{f(x)-f(0)}{x-0} < 0$

D'après les propriétés des limites et ordre , on déduit que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Calcul de $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Soit $x\in\,]-\infty;0[$, on a: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{Arc\tan(x)-x}{x^2}$

On pose: $t=-x$, alors $x\to 0^-\Leftrightarrow t\to 0^+$

Comme la fonction $Arc\tan$ est impaire, alors:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{Arc\tan x-x}{x^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{Arc\tan(-t)+t}{(-t)^2}=\lim_{t\to 0^+}-\frac{Arc\tan t-t}{t^2}=0$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x+0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

c'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

Signifie que la fonction f est dérivable en 0 et que: $f'(0)=0$

b) Déterminons les branches infinies de la courbe de la fonction g :

* Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a:

$$g(x)=(x-1)^2\times\frac{Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\times\frac{1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\times\frac{Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

On pose: $t=\dfrac{1}{x}$, alors $|x|\to+\infty\Leftrightarrow t\to 0$

Donc: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{Arc\tan(t)}{t}=(Arc\tan)'(0)=1$

Et on a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$

* Calcul de $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a: $\dfrac{g(x)}{x}=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2\times\dfrac{Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

Comme: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2=1$

Alors: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Calcul de $\lim\limits_{|x|-+\infty}(g(x)-x)$

On pose: $t=\frac{1}{x}$, alors $|x|\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0$

Donc:

$$g(x)-x=(x-1)^2 Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)-x$$

$$=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 Arc\tan(t)-\frac{1}{t}=\frac{Arc\tan(t)-t}{t^2}-2\times\frac{Arc\tan t}{t}+Arc\tan(t)$$

Et puisque: $\lim\limits_{t-0}\frac{Arc\tan t-t}{t^2}=0$, $\lim\limits_{t-0}\frac{Arc\tan t}{t}=1$ et $\lim\limits_{t-0}Arc\tan(t)=0$

alors $\lim\limits_{|x|-+\infty}g(x)-x=\lim\limits_{t-0}\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 Arc\tan(t)-\frac{1}{t}=-2$

Ainsi la droite d'équation $y=x-2$ est une asymptote oblique à la courbe de la fonction de g au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 16

1) Montrons que: $(\forall x\in]-\infty;0[)$; $Arc\tan x<\frac{x}{1+x^2}$

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty;0[$

La fonction $Arc\tan$ est continue sur $[x;0]$ et dérivable sur $]x;0[$.

D'après le théorème des accroissements finis:

$(\exists c\in]x;0[)$: $Arc\tan(x)-Arc\tan(c)=(x-0)\times(Arc\tan)'(c)$

C'est-à-dire: $(\exists c\in]x;0[)$: $Arc\tan x=x(Arc\tan)'(c)$

Or: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $(Arc\tan)'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, soit $(Arc\tan)'(c)=\frac{1}{1+c^2}$

Donc: $(\exists c\in]x;0[)$: $Arc\tan x=\frac{x}{1+c^2}$

Puisque: $x<c<0\Leftrightarrow 0<c^2<x^2$

$\Leftrightarrow 1+c^2<1+x^2$

alors $\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+c^2}$

Par suite: $\frac{x}{1+c^2}<\frac{x}{1+x^2}$, donc: $Arc\tan(x)<\frac{x}{1+x^2}$

Ainsi: $(\forall x\in]-\infty;0[)$; $Arc\tan(x)<\frac{x}{1+x^2}$

2) Soit a et b des réels tels que $0<a<b<\frac{\pi}{2}$

Montrons que: $\frac{1}{\cos^2(a)}<\frac{\tan b-\tan a}{b-a}<\frac{1}{\cos^2(b)}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

La fonction tan est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. D'après le théorème des accroissements finis.

$(\exists c \in]a;b[) / \tan(b) - \tan(a) = (b-a) \times (\tan)'(c)$

Or: $\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$, $(\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Donc: $(\exists c \in]a;b[) / \tan(b) - \tan(a) = \frac{b-a}{\cos^2(c)}$

C'est-à-dire: $\frac{\tan b - \tan a}{b-a} = \frac{1}{\cos^2(c)}$

Puisque la fonction cos est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;\frac{\pi}{2}[$

alors: $0 < a < c < b < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos b < \cos c < \cos a$

$\Rightarrow 0 < \cos^2(b) < \cos^2(c) < \cos^2(a)$

Donc: $\frac{1}{\cos^2(a)} < \frac{1}{\cos^2(c)} < \frac{1}{\cos^2(b)}$

Ainsi $\frac{1}{\cos^2(a)} < \frac{\tan b - \tan a}{b-a} < \frac{1}{\cos^2(b)}$

3) Montrons que:

$(\forall x;y \in [0;10])$; $|x\cos x - y\cos y| \leq 11 \times |x-y|$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par: $f(t) = t\cos t$

* La fonction f est continue sur $[0;10]$ (produit de deux fonctions continues).

* La fonction f est dérivable sur $]0;10[$

* $(\forall t \in \mathbb{R})$; $f'(t) = \cos t - t\sin t$

et $|f'(t)| \leq |\cos t| + |t||\sin t| \leq 1 + |t| \leqslant 1 + 10$

Donc: $(\forall t \in [0;10])$, $|f'(t)| \leq 11$

D'après l'inégalité des accroissements finis (IAF):

$\forall (x;y) \in [0;10]^2$; $|f(x) - f(y)| \leq 11 \times |x-y|$

Ainsi: $(\forall (x;y) \in [0;10]^2)$; $|x\cos x - y\cos y| \leq 11 \times |x-y|$.

4) Montrons que: $(\forall x;y \in [0;1])$; $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{4\cos^2(1)}$

où $f(t) = \frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{1+t}\right)$

* Montrons que la fonction f est dérivable $[0;1]$:

For more visit: L9ray.com CamScanner

La fonction $u:t\mapsto\frac{1}{1+t}$ est dérivable sur $[0;1]$ et on a:

$\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+t}\le 1$ c'est-à-dire $u([0;1])\subset\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction tan est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction $f=\tan ou$ est dérivable sur $[0;1]$.

* Calcul de la dérivée de f:

$$(\forall t\in[0;1])\ ;\ f'(t)=\frac{1}{4}\times\frac{u'(t)}{\cos^2(u(t))}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{\frac{-1}{(1+t)^2}}{\cos^2\left(\frac{1}{1+t}\right)}=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1+t)^2}\times\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{1+t}\right)}\quad(1)$$

Or $\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+t}\le 1\Rightarrow\frac{1}{(1+t)^2}\le 1$ (2)

Et puisque la fonction cos est strictement décroissante sur $[0;\pi]$ et $\left[\frac{1}{2};1\right]\subset[0;\pi]$ alors : $\cos(1)\le\cos\left(\frac{1}{1+t}\right)\le\cos\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc: $0<\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{1+t}\right)}\le\frac{1}{\cos^2(1)}$ (3)

Et comme: $(\forall t\in[0;1])\ ;|f'(t)|=\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1+t)^2}\times\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{1+t}\right)}$ (d'après (1), (2) et (3))

Alors: $(\forall t\in[0;1])\ ;|f'(t)|\le\frac{1}{4\cos^2(1)}$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis (IAF)

$$(\forall x;y\in[0;1])\ ;|f(x)-f(y)|\le\frac{1}{4\cos^2(1)}\times|x-y|$$

5) Montrons que: $(\forall x;y\in[0;2])\ ;|g(x)-g(y)|\le\frac{\sqrt{2}}{12}|x-y|$

où $g(t)=Arc\tan(\sqrt{t+2})$

* Montrons que la fonction g est dérivable sur $[0;2]$

On a la fonction $u:t\mapsto\sqrt{t+2}$ est dérivable sur $[0;2]$, il s'ensuit que la fonction $g=Arc\tan$ ou est dérivable sur $[0;2]$

* On a: $(\forall t\in[0;2])\ ;\ g'(t)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2+t}}}{1+(\sqrt{2+t})^2}=\frac{1}{2(t+3)\sqrt{t+2}}$

Ainsi: $|g'(t)|=\frac{1}{2(t+3)\sqrt{t+2}}$ pour $t\in[0;2]$

Puisque $0\le t\le 2\Rightarrow 3\le t+3\le 5$ et $\sqrt{2}\leqslant\sqrt{t+2}\leqslant 2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Alors: $2(t+3)\sqrt{t+2} \geqslant 6\sqrt{2}$ c'est-à-dire: $\frac{1}{2(t+3)\sqrt{t+2}} \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$

Ainsi: $(\forall t \in [0;2])\ ;\ |g'(t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{12}$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis (IAF):

$(\forall x;y \in [0;2])\ ;\ |g(x)-g(y)| \leq \frac{\sqrt{2}}{12}|x-y|$

Exercice 17

1) Théorème des accroissement finis :

a et b étant deux réels avec $a < b$

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$,

alors : $(\exists c \in]a;b[): f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$

2) Montrons que : $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right); 1 < \frac{\tan x}{x} < 1+\tan^2(x)$

Soit x un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

La fonction $t \longmapsto \tan t$ est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$ (car $[0;x] \subset \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et tan est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$)

Donc, d'après TAF: $\exists c \in]0;x[: \tan(x) - \tan(0) = (x-0)(\tan)'(c)$

Puisque : $(\forall t \in]0;x[)\ ; (\tan)'(t) = 1+\tan^2(t)$

alors : $(\exists c \in]0;x[) : \frac{\tan(x)}{x} = 1+\tan^2(c)$

or : $0 < c < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \tan(c) < \tan(x)$

$\Rightarrow 1 < 1+\tan^2(c) < 1+\tan^2(x)$

Donc : $1 < \frac{\tan x}{x} < 1+\tan^2(x)$

Ainsi : $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right); 1 < \frac{\tan x}{x} < 1+\tan^2(x)$

Exercice 18

1) Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f(x) \geqslant xf'(x)$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : la fonction f est continue sur $[0;x]$

et dérivable sur $]0;x[$ donc, d'après TAF : $(\exists c \in]0;x[) / f(x)-f(0) = (x-0)f'(c)$

c'est-à-dire : $(\exists c \in]0;x[) / f(x) = xf'(c)$ (car $f(0)=0$)

Puisque f' est décroissante sur $]0;x[$ alors : $0 < c < x \Rightarrow f'(c) \geqslant f'(x)$

Par suite $xf'(c) \geqslant xf'(x)$, d'où : $f(x) \geqslant xf'(x)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Ainsi : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,;\, f(x) \geqslant xf'(x)$

2) Montrons que la fonction g est décroissante sur $]0;+\infty[$

Les fonctions f et $u : x \longmapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$,

donc la fonction $g = \frac{f}{u}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[) : g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

or : $xf'(x) - f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[) : g'(x) \leqslant 0$

On conclut que la fonction g est décroissante sur $]0;+\infty[$

Exercice 19

1) Montrons que : $\exists! \alpha \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[\,/\, f(\alpha) = \alpha$

On considère la fonction g définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par :

$g(x) = f(x) - x = x + \sin x - \cos x$

• La fonction g est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ en tant que somme des fonctions continues.

• $f(0) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, alors $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$

Donc d'apès le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\left(\exists \alpha \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right) / \, g(\alpha) = 0$$

c'est-à-dire : $\left(\exists \alpha \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right) / \, f(\alpha) = \alpha$

• Montrons que le réel α est unique :

La fonction g est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et on a :

$\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right) ; g'(x) = 1 + \cos x + \sin x$

or $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x \geqslant 0$

$\Rightarrow 1 + \sin x + \cos x > 0$

c'est-à-dire : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right) ; g'(x) > 0$

Donc la fonction g est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, d'où l'unicité du réel α.

Finalement : $\left(\exists! \alpha \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right) / \, f(\alpha) = \alpha$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Montrons que : $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] / f'(x) \leqslant 4$

La fonction f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et on a :

$$\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right) ; f'(x) = 2 + \cos x + \sin x$$

Puisque : $|f'(x)| \leqslant 2 + |\cos x| + |\sin x|$, $|\cos x| \leqslant 1$ et $|\sin x| \leqslant 1$ alors $|f'(x)| \leqslant 4$

Ainsi : $|f'(x)| \leqslant 4$ pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

3) Montrons que : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right) ; |f(x) - \alpha| \leq \pi$

La fonction f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et $|f'(x)| \leq 4$ pour tout réel x de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, donc, d'après TAF :

$\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right) ; |f(x) - f(\alpha)| \leq 4|x - \alpha|$

C'est-à-dire : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right) ; |f(x) - \alpha| \leq 4|x - \alpha|$

Or $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ et $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ donc : $-\frac{\pi}{4} \leq x - \alpha \leq \frac{\pi}{4}$

C'est-à-dire : $|x - \alpha| \leq \frac{\pi}{4}$ par suite : $4|x - \alpha| \leq \pi$

Par conséquent : $|f(x) - \alpha| \leq \pi$

Finalement : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right) ; |f(x) - \alpha| \leq \pi$

Exercice 20

Montrons que : $(\exists c \in]0;1[) ; \sqrt[4]{c^3} \times f'(c) = 1$

On considère la fonction g définie sur $[0;1]$ par : $g(x) = f(x) - 4\sqrt[4]{x}$

La fonction g est continue sur $[0;1]$, en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0;1]$, à savoir : f et $x \mapsto -4\sqrt[4]{x}$.

De même la fonction g est dérivable sur $]0;1[$ telles que :

$g(1) = g(0) = 0$ (car $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$)

Donc, d'après le théorème de Rolle : $(\exists c \in]0;1[) ; g'(c) = 0$

Or $g'(x) = f'(x) - 4\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} = f'(x) - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

Donc : $g'(c) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{c^3} \times f'(c) = 1$

Finalement : $(\exists c \in]0;1[) ; \sqrt[4]{c^3} \times f'(c) = 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 21

1) a) Montrons que le point $I(0;1)$ est un centre de symétrie de (C):

L'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$, donc pour tout $x \in D_f$, on a : $-x \in D_f$

D'autre part, pour tout $x \in D_f$, on a :

$$\begin{aligned} f(-x)+f(x) &= 1+x+Arc\tan(-x)+1-x+Arc\tan(x) \\ &= 1+x-Arc\tan(x)+1-x+Arc\tan(x) = 2 \end{aligned}$$

Ainsi : $(\forall x \in D_f); 2\times 0 - x \in D_f$ et $f(2\times 0 - x)+f(x) = 2\times 1$

C'est-à-dire le point $I(0;1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

b) Dressons le tableau de variations de f :

On a pour tout réel x : $f(x) = 1-x+Arc\tan(x)$

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, à savoir : $x \mapsto 1-x$ et $x \mapsto Arc\tan(x)$

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (1-x)' + (Arc\tan)'(x)$

$$= -1 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-x^2}{1+x^2}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) \leqslant 0$ et $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

Ainsi la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan x = \frac{\pi}{2}$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x+Arc\tan(x) = -\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan x = -\frac{\pi}{2}$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x+Arc\tan(x) = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

D'où le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-	
f	$+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} :

D'après la question précédente, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de la bijection réciproque, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$,

où $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to-\infty} f(x)[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrons que : $(\exists!\alpha \in \mathbb{R})\,; f(\alpha) = 0$

Puisque la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$,

et $0 \in \mathbb{R}$, donc il existe un unique réel α tel que : $f(\alpha) = 0$

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

• Montrons que : $2 < \alpha < \frac{5}{2}$

On a : $f(2) = 1 - 2 + Arc\tan(2) = -1 + Arc\tan(2)$

Comme $\frac{\pi}{4} < 2 \Rightarrow Arc\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) < Arc\tan(2)$

$\Rightarrow 1 < Arc\tan(2)$

$\Rightarrow Arc\tan(2) - 1 > 0$

Alors : $f(2) > 0$

Et on a: $f\left(\frac{5}{2}\right) = 1 - \frac{5}{2} + Arc\tan\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2} + Arc\tan\left(\frac{5}{2}\right)$

et $Arc\tan\left(\frac{5}{2}\right) \simeq 1,19$. Alors : $f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$

Par suite : $f\left(\frac{5}{2}\right) < f(\alpha) < f(2)$ et la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

donc : $2 < \alpha < \frac{5}{2}$

3) a) Etudions les branches infinies de la courbe (C):

• Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\frac{f(x)}{x} = 1 - + \frac{1}{x} + \frac{Arc\tan x}{x}$

Puisque : $\lim_{|x|\to+\infty} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = -1$. Alors : $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$:

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $f(x)+x=1+Arc\tan x$, et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan x=\frac{\pi}{2}$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan x=-\frac{\pi}{2}$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x=1+\frac{\pi}{2}$

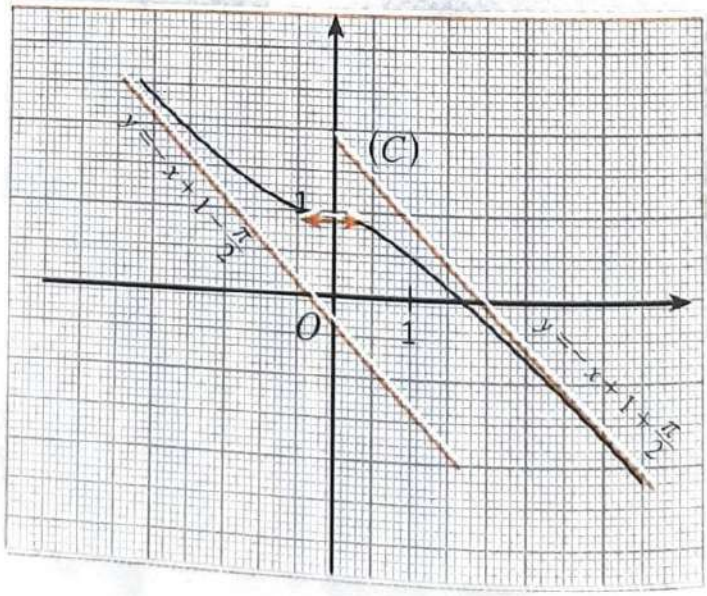
et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=1-\frac{\pi}{2}$

Conclusion :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(-x+1-\frac{\pi}{2}\right)=0$, donc la droite d'équation $y=-x+1-\frac{\pi}{2}$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(-x+1-\frac{\pi}{2}\right)$, donc la droite d'équation $y=-x+1+\frac{\pi}{2}$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b) La courbe (C) de la fonction f :



4) a) • Montrons que la fonction f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}-\{1\}$:

La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}-\{0\}$

et $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\,;\,f(x)\neq 0$, donc la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(\mathbb{R})-\{f(0)\}=\mathbb{R}-\{1\}$ car $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ et $f(0)=1$

Ainsi la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}-\{1\}$.

• Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{1\})\,;1+(f^{-1})'(x)+\frac{1}{(f^{-1}(x))^2}=0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit x un élément de $\mathbb{R}-\{1\}$, on a : $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Or $(\forall y\in\mathbb{R}^*)\,;\,f'(y)=\dfrac{-y^2}{1+y^2}$. Puisque : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ alors : $f^{-1}(x)\in\mathbb{R}^*$

donc : $f'(f^{-1}(x))=\dfrac{-(f^{-1}(x))^2}{1+(f^{-1}(x))^2}$

Par suite : $\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=-\dfrac{1+(f^{-1}(x))^2}{(f^{-1}(x))^2}=-1-\dfrac{1}{(f^{-1}(x))^2}$

D'où : $(f^{-1})'(x)=-1-\dfrac{1}{(f^{-1}(x))^2}$

Ainsi : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{1\})\,;1+(f^{-1})'(x)+\dfrac{1}{(f^{-1}(x))^2}=0$

b) Montrons que : $\left(\exists c\in\left]\dfrac{\pi}{4};1\right[\right);\left(\dfrac{\pi}{4}-1\right)\left(1+\dfrac{1}{(f^{-1}(x))^2}\right)=-1$

La fonction f^{-1} est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{4};1\right]$ et dérivable sur $\left]\dfrac{\pi}{4};1\right[$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe au moins $c\in\left]\dfrac{\pi}{4};1\right[$ tel que : $f^{-1}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-f^{-1}(1)=\left(\dfrac{\pi}{4}-1\right)(f^{-1})'(c)$.

Puisque : $f(0)=1$ et $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$ alors : $f^{-1}(1)=0$ et $f^{-1}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

donc : $f^{-1}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-f^{-1}(1)=1$

Et on a : $(f^{-1})'(c)=-\left(1+\dfrac{1}{(f^{-1}(c))^2}\right)$

Donc : $\left(\exists c\in\left]\dfrac{\pi}{4};1\right[\right);\left(\dfrac{\pi}{4}-1\right)\left(1+\dfrac{1}{(f^{-1}(c))^2}\right)=-1$

Exercice 22

1) Montrons que la fonction f est dérivable sur $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$

La fonction tan est dérivable en tout point de $D_{\tan}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

et $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[\subset D_{\tan}$ donc la fonction tan est dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Par conséquent : $f=\dfrac{1}{\tan}$ est dérivable sur $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[$

* Montrons que f est dérivable à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$:

Soit $x\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a: $f(x)=\dfrac{1}{\tan(x)}$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ donc :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{1}{\tan x}}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x}$$

On pose: $t=x-\frac{\pi}{2}$, on a: $x\to\frac{\pi}{2}^{-}\Leftrightarrow t\to 0^{-}$

et $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)=tx\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{t}{\tan(t)}$

Donc: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}}\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x}=\lim\limits_{t\to 0^{-}}\left(-\frac{\tan(t)}{t}\right)=-1$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$, c'est-à-dire la fonction f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et on a: $f'_g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

Finalement la fonction f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Montrons que: $\left(\forall x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\right)\ ;\ -2\leq f'(x)\leq -1$

On a: $\left(\forall x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\right), f'(x)=\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)'=\frac{-(1+\tan^2(x))}{\tan^2(x)}$

$$=-1-\frac{1}{\tan^2(x)}$$

Soit $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$, on a: $-1-\frac{1}{\tan^2(x)}<-1$ (car $\frac{-1}{\tan^2(x)}<0$)

C'est-à-dire: $f'(x)<-1$ et on a: $f'_g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

Donc: $\left(\forall x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]\right)\ ;\ f'(x)\leq -1$

D'autre part : on a: $\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\leq\tan x$

$$\Rightarrow 1\leq\tan(x)$$

Car la fonction tan est croissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

Par suite $1\leq\tan x\Rightarrow 1\leq\tan^2(x)$

$$\Rightarrow 1\geqslant\frac{1}{\tan^2(x)}$$

$$\Rightarrow -1\leq-\frac{1}{\tan^2(x)}$$

$$\Rightarrow -2\leqslant -1-\frac{1}{\tan^2(x)}$$

Donc: $\left(\forall x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]\right)\ ;\ -2\leq f'(x)$ (2)

For more visit: L9ray.com CamScanner

Finalement , de (1) et (2) s'ensuit que: $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\right)\ ;\ -2 \le f'(x) \le -1$

3) Déduisons que: $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\right)$, $\frac{\pi}{2} - 2x \le \frac{1-\tan x}{\tan x} \le \frac{\pi}{4} - x$

Soit $x \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$, on a la fonction f

est continue sur $\left[\frac{\pi}{4};x\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{\pi}{4};x\right[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis , on a: $\left(\exists c \in \left]\frac{\pi}{4};x\right[\right) 1\frac{1}{\tan x} - 1 = \left(x - \frac{\pi}{4}\right)f'(c)$

Puisque: $-2 \le f'(c) \le -1$ alors $-2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \left(x - \frac{\pi}{4}\right)f'(c) \le -x + \frac{\pi}{4}$

Donc: $-2x + \frac{\pi}{2} \le \frac{1-\tan x}{\tan x} \le \frac{\pi}{4} - x$

Ainsi: $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\right)\ ;\ \frac{\pi}{2} - 2x \le \frac{1-\tan x}{\tan x} \le \frac{\pi}{4} - x$

4) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} :

Puisque f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ alors elle est continue sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

Et on a $f'(x) \le -1 < 0$ pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ donc la fonction f est strictement décroissante $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$,

s'ensuit que f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ sur l'intervalle $f\left(\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right);f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = [0;1]$

Par conséquent f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0;1]$

b) L'expression de $f^{-1}(x)$ où $x \in [0;1]$

Soit $x \in]0;1]$ et $y \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ tels que : $f^{-1}(x) = y$.

On a: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\tan y}$

$\Leftrightarrow \tan y = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow y = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

Et on a: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $f^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

Ainsi: $\begin{cases} f^{-1}(x) = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \in]0;1] \\ f^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

Exercice 23

1) a) Montrons que: $g(a) \neq g(b)$

En utilisant un raisonnement par l'absurde, supposons que: $g(a) = g(b)$

On a la fonction g est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ et telle que $g(a) = g(b)$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe au moins un réel $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui est absurde, car $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a;b[$.

Donc: $g(a) \neq g(b)$.

b) Montrons que: $(\exists c \in]a;b[) \setminus \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

On considère la fonction φ définie sur l'intervalle $[a;b]$ par:

$$\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \times (g(x)-g(a)) - (f(x)-f(a))$$

La fonction φ est continue sur $[a;b]$ (car f et g sont des fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ (car f et g sont des fonctions dérivables sur $]a;b[$) et telles que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Donc , d'après le théorème de Rolle: $(\exists c \in]a;b[) / \varphi'(c) = 0$

Comme: $(\forall x \in]a;b[)$; $\varphi'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x) - f'(x)$

alors $\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) - f'(c) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Finalement : $(\exists c \in]a;b[) / \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

2) Application:

Calculons les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - \sin x}{x^3} \right)$

Soit x un réel de $]0; +\infty[$

On considère les fonctions f et g définies sur $[0;x]$ par:

$f(t) = t - \sin t$ et $g(t) = t^3$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Les fonctions f et g sont continues sur $[0;x]$ et dérivables sur $]0;x[$ et que: $(\forall t \in]0;x[)\ ;\ g'(t) = 3t^2$, c'est-à-dire $(\forall t \in]0;x[)\ ;\ g'(t) \neq 0$

Donc, d'après la question précédente: $(\exists c \in]0;x[) / \dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Comme: $(\forall t \in]0;x[)\ ;\ f'(t) = 1 - \cos t$ et $f(0) = g(0) = 0$, alors:

$(\exists c \in]0;x[) / \dfrac{x-\sin x}{x^3} = \dfrac{1-\cos c}{3c^2} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1-\cos c}{c^2}\right)$.

Et on a: $0 < c < x$ alors: $x \to 0^+$ équivaut $c \to 0^+$

Donc: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^3}\right) = \lim\limits_{c\to 0^+}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1-\cos c}{c^2}\right) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

• Calculons: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^3}\right)$

On pose: $t = -x$ on aura $x \to 0^- \Leftrightarrow t \to 0^+$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^3}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{-t-\sin(-t)}{-t^3}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{t-\sin t}{t^3}\right) = \dfrac{1}{6}$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^3}\right) = \dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-Arc\tan x}{x^3}\right)$:

Soit $x \in]0;+\infty[$. On considère les fonctions u et v définies sur $[0;x]$ définies par: $u(t) = t - Arc\tan t$ et $v(t) = t^3$

Les fonctions u et v sont continues sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$

Et on a: $(\forall t \in]0;x[)\ ;\ v'(t) = 3t^2$ c'est-à-dire: $(\forall t \in]0;x[)\ ;\ v'(t) \neq 0$

Donc , d'après la questions précédente: $(\exists c \in]0;x[): \dfrac{u(x)-u(0)}{v(x)-v(0)} = \dfrac{u'(c)}{v'(c)}$

Puisque $(\forall t \in]0;x[)\ ;\ u'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ et $u(0) = v(0)$ alors

$(\exists c \in]0;x[)\ ;\ \dfrac{x-Arc\tan x}{x^3} = \dfrac{c^2}{3c^2(1+c^2)} = \dfrac{1}{3(1+c^2)}$

Et on a: $0 < c < x$ alors $x \to 0^+$ équivaut à $c \to 0^+$

Donc: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-Arc\tan x}{x^3} = \lim\limits_{c\to 0^+}\left(\dfrac{1}{3(1+c^2)}\right) = \dfrac{1}{3}$

Calculons $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x-Arc\tan x}{x^3}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On pose: $t = -x$, on aura $x \to 0^- \Leftrightarrow t \to 0^+$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x - Arc\tan x}{x^3}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{-t - Arc\tan(-t)}{-t^3}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{t - Arc\tan t}{t^3}\right) = \dfrac{1}{3}$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x - Arc\tan x}{x^3}\right) = \dfrac{1}{3}$

Exercice 24

Montrons que : $(\exists c \in]a;b[) / f'(c) = \dfrac{f(c)}{c-a}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x)}{x-a} \text{ si } a < x \leqslant b \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

On a : La fonction f est continue sur $]a;b]$ et la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x-a}$ est continue sur $]a;b]$ donc la fonction g est continue sur l'intervalle $]a;b]$.

Puisque la fonction f est dérivable à droite en a et $f(a) = 0$ et $f'_d(a) = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0 = g(a)$

signifie que la fonction g est continue à droite en a.

Par conséquent la fonction g est continue sur le segment $[a;b]$.

Et on a la fonction g est dérivable sur $]a;b[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]a;b[$.

Et comme $g(a) = g(b) = 0$ alors : d'après le théorème de Rolle :

$(\exists c \in]a;b[) / g'(c) = 0$

or : $(\forall x \in]a;b[); g'(x) = \dfrac{(x-a)\times f'(x) - f(x)}{(x-a)^2}$

Donc : $g'(c) = 0 \Leftrightarrow (c-a)f'(c) - f(c) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(c)}{c-a}$$

Ainsi : $(\exists c \in]a;b[) / f'(c) = \dfrac{f(c)}{c-a}$

Exercice 25

Montrons que : $(\exists (a;b;c) \in (]0;1[)^3) / f'(a) \times f'(b) = \dfrac{1-c^n}{1-c}.c^{n-1}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = f(x) + x^n - 1$ ou $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

La fonction g est continue sur $[0;1]$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0;1]$ qui sont $x \longmapsto x^n$ et f.

Et puisque $f(0)=0$ et $f(1)=1$ alors $g(0)=-1$ et $f(1)=1$

C'est-à-dire : $g(0)\times g(1)<0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$(\exists c\in]0;1[)\ /\ g(c)=0$ c'est-à-dire : $\exists c\in]0;1[\ /\ f(x)=1-c^n$

Par suite la fonction f est continue sur $[0;c]$ et dérivable sur $]0;c[$, donc d'après le théorème des accroissements finis :

$(\exists a\in]0;c[)\ /\ f(c)-f(0)=(c-0).f'(a)$

Comme $f(0)=0$ et $f(c)=1-c^n$ on aura donc :

$(\exists a\in]0;c[)\ /\ f'(a)=\dfrac{1-c^n}{c}$

Et on a la fonction f est continue sur $[c;1]$ et dérivable sur $]c;1[$.

Donc, d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$(\exists b\in]c;1[)\ /\ f(1)-f(c)=(1-c).f'(b)$$

comme $f(1)=1$ et $f(c)=1-c^n$ on aura donc :

$$f'(b)=\frac{1-1+c^n}{1-c}=\frac{c^n}{1-c}$$

Par conséquent : $f'(a)\times f'(b)=\dfrac{1-c^n}{c}\times\dfrac{c^n}{1-c}=\dfrac{1-c^n}{1-c}\times c^{n-1}$

Finalement : $(\exists (a;b;c))\in (]0;1[)^3\ /\ f'(a)\times f'(b)=\dfrac{1-c^n}{1-c}\times c^{n-1}$

Exercice 26

1) a- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

Soit x un réel de $]0;+\infty[$, on a :

la fonction f' est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$

donc, d'après T A F : $(\exists c\in]0;x[)\ /\ f'(x)-f'(0)=(x-0)f''(c)$

Comme $f''(t)\geqslant \alpha$ pour tout réel t, alors $f''(c)\geqslant\alpha$

Par suite $xf''(c)\geqslant \alpha x$, car $x>0$

Par conséquent : $\begin{cases}(\forall x\in]0;+\infty[),\ f'(x)\geqslant f'(0)+\alpha x\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f'(0)+\alpha x=+\infty\end{cases}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On conclut, d'après les propriétés de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

• Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$:

Soit $x \in]-\infty;0[$, on a :

La fonction f' est continue sur $[x;0]$ et dérivable sur $]x;0[$

Donc, d'après T A F : $\exists c' \in]x;0[\ / \ f'(x) - f'(0) = (x-0)f''(c')$

comme $f''(t) \geqslant \alpha$ pour tout réel t, alors $f''(c') \geqslant \alpha$

Par suite $xf''(c') \leqslant \alpha x$, car $x < 0$

Par suite : $\begin{cases} (\forall x \in]-\infty;0[) ; f'(x) \leqslant f'(0) + \alpha x \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f'(0) + \alpha x = -\infty \end{cases}$

On conclut, d'après les propriétés de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$

2) Montrons que f' est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$:

On a : $f''(x) \geqslant \alpha$ pour tout réel x et $\alpha > 0$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) > 0$

signifie que la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Comme f' est continue sur $\mathbb{R}$ alors f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f'(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

3) • Montrons que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$:

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) \neq 0$ pour tout réel x ; donc la fonction $g = (f')^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$(\forall x \in \mathbb{R}), g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

Et on a la fonction $f''og$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent la fonction $h : \longmapsto xg(x) - fog(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Calcul de $h'(x)$ où $x + \mathbb{R}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = xg'(x)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}), h'(x) = g(x) + xg'(x) - xg'(x) = g(x)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 27

Montrons que $(\forall x \in]a;b[) ; f'(x) \neq 0$

En utilisant un raisonnement par l'absurde :

Supposons que : $(\exists x_0 \in]a;b[) / f(x_0) = 0$

On a : La fonction f est continue sur $[a;x_0]$, dérivable sur $]a;x_0[$

et $f(x_0) = f(a) = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle :

$(\exists c_1 \in]a;x_0[) / f'(c_1) = 0$

• La fonction f est continue sur $[x_0;b]$; dérivable sur $]x_0;b[$

et $f(x_0) = f(b) = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle : $(\exists c_2 \in]x_0;b[) / f'(c_2) = 0$

D'autre part la fonction f est deux fois dérivables sur l'intervalle $]a;b[$

et $a < c_1 < c_2 < b$.

Donc : la fonction f' est contiunue sur $[c_1;c_2]$, dérivable sur $]c_1;c_2[$

et $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.

Il s'ensuit que : $\exists c \in]c_1;c_2[/ f''(c) = 0$, d'après le théorème de Rolle :

Ce qui est contradictoire avec $f''(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]a;b[$

On conclut que : $(\forall x \in [a;b]) ; f(x) \neq 0$

Exercice 28

1) Montrons que φ est une bijection de $]0;1]$ sur $[0;+\infty[$:

La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - 1$ étant continue et dérivable sur l'intervalle $]0;1]$

et on a :

$(\forall x \in]0;1]) ; \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Il s'ensuit que : $(\forall x \in]0;1]) ; \varphi'(x) < 0$, c'est-à-dire la fonction φ est strictement décroissante sur $]0;1]$.

Puisque la fonction φ est continue et strictement décroissante sur $]0;1]$

alors elle réalise une bijection de $]0;1]$ sur l'intervalle $J = \varphi(]0;1])$

où $J = [\varphi(1); \lim\limits_{x \to 0^+} \varphi f(x)[= [0;+\infty[$

2) a) Montrons que la fonction F est continue sur $[0;1]$:

On a : $(\forall x \in]0;1]) ; F(x) = f\left(\frac{1}{x} - 1\right) = (fo\varphi)(x)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Puisque la fonction φ est continue sur $]0;1]$, la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$ et $\varphi(]0;1])=[0;+\infty[$, alors la fonction $F=fo\varphi$ est continue sur l'intervalle $]0;1]$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}f(X)=f(0)$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(\varphi(x))=f(0)$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=F(0)$

signifie que la fonction F est continue à droite en 0.

Finalement la fonction F est continue sur le segment $[0;1]$.

b) Montrons que la fonction F est dérivable sur $]0;1]$:

On a : $F=fo\varphi$. Puisque la fonction φ est dérivable sur $]0;1[$ et la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $\varphi(]0;1[)=]0;+\infty[$ alors la fonction $F=fo\varphi$ est dérivable sur l'intervalle $]0;1[$.

3) Montrons que : $(\exists c\in]0;+\infty[)\,;f'(c)=0$

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction F sur l'intervalle $[0;1]$.

On a : la fonction F est continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et telle que : $F(0)=F(1)=0$

D'après le théorème de Rolle : $(\exists k\in]0;1[)\,;F'(k)=0$

Or $(\forall x\in]0;1[)\,;F'(x)=(fo\varphi)'(x)=f'(\varphi(x))\times\varphi'(x)$

C'est-à-dire : $(\forall x\in]0;1[)\,;F'(x)=-\frac{1}{x^2}\times f'\left(\frac{1}{x}-1\right)$

Par suite : $F'(k)=0\Leftrightarrow\frac{1}{k^2}\times f'\left(\frac{1}{k}-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{k}-1\right)=0$$

On prend : $c=\frac{1}{k}-1=\varphi(k)$

Et comme $\varphi(]0;1[)=]0;+\infty[$ alors : $c=\varphi(k)\in]0;+\infty[$

Ainsi : $(\exists c\in]0;+\infty[)\,;f'(c)=0$

4) Montrons que le réel c est unique :

En utilisant un raisonnement par l'absurde

On suppose que : $(\exists c'\in]0;+\infty[)\,;f'(c')=0$ où $c<c'$ par exemple

On a la fonction f' est continue sur $[c;c']$, et dérivable sur $]c;c'[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

telle que : $f'(c) = f'(c') = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle : $(\exists \alpha \in]c;c'[) ; f''(\alpha) = 0$

Ce qui est contradictoire avec : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f''(x) \neq 0$

Finalement : $(\exists! c \in]0;+\infty[) / f'(c) = 0$

Exercices de synthèse

Exercice 29

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x(\sqrt[3]{x} - 2)^2$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Etudier la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 30

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x) = 1 + \cos(\pi x)$$

1) a) Donner le tableau de variations de la fonction f.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0;2]$.

2) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]0;2[$ et que :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi\sqrt{2x - x^2}} \text{ pour tout réel } x \text{ de }]0;2[.$$

3) Déterminer : $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f^{-1}(x)}{x-2}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f^{-1}(x) - 1}{x}$

4) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;2]$ par :

$$h(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(2 - x)$$

a) Montrer que la fonction h est dérivable sur l'intervalle $]0;2[$, puis calculer $h'(x)$ pour tout réel x de $]0;2[$.

b) Calculer, $h(1)$, puis montrer que : $h(x) = 1$ pour tout réel x de l'intervalle $[0;2]$.

c) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 31

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = Arc\tan(2x\sqrt{1-x}) + \frac{\pi}{2}$$

et soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 1, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-\infty;1[$,

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 32

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

1) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f ;

b) Vérifier que : $f([1;2]) \subset [1;2]$, et montrer que :

$$(\forall x \in [1;+\infty[) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;2[$.

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On pose pour tout entier naturel n : $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 2$

b) i) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et que la suite (y_n) est croissante.

ii) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; y_n < \alpha < x_n$

c) i) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |x_n - y_n|$

ii) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

iii) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \alpha$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 33

I/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = Arc\tan(x) + 2x - 1$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, f'(x) > 2$

2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $0 < \alpha < 1$

4) Montrer que : $(\forall x \in]\alpha; +\infty[)\,;\, f(x) > x$

II/ On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \quad \text{ou } a \in \mathbb{R} \text{ et } a > \alpha \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n > \alpha$

2) Montrer que la suite (u_n) est monotone, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(u_n - \alpha)$$

4) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 34

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$$

et soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Déterminer D le domaine de définition de f ;

b) Calculer les limites de la fonction f aux bornes des intervalles de D ;

c) Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$.

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en -1, puis donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $D - \{-1\}$;

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

4) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

a) Montrer que la fonction g réalise une bijection dans un intervalle J à préciser.

b) Montrer que : $(\exists!\alpha \in]0;+\infty[)\,;g(\alpha)=0$ et que : $1<\alpha<2$

c) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable sur J, et montrer que :

$$(g^{-1})'(0)=\frac{3\alpha^4}{1+3\alpha^4}$$

d) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 35

I/ Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{\tan x}{x}\,;0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ g(0)=1 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction g est continue sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, puis calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)$.

2) a) Soit x un élément de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\varphi: t\mapsto \tan(t)-t$ sur l'intervalle $[0;x]$, montrer que : $0<\tan(x)-x<x\times\tan^2(x)$

b) Montrer que la fonction g est dérivable à droite en $x_0=0$

3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

b) Montrer que la fonction g réalise une bijection de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser.

II/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=Arc\tan(g(x))\,;0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ f(0)=\dfrac{\pi}{4}\ \ et\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Et soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0=0$, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $(\forall t>0)\,;Arc\tan(t)+Arc\tan\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) Montrer que la fonction f est dérivable à gauche en $x_1 = \frac{\pi}{2}$

3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 36

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{\pi Arc\tan(x)} \; ; x > 0 \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Et soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Montrer que : $(\forall x > 0)$; $Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) Montrer que la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

3) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$, puis étudier le signe de $f'(x)$ pour $x > 0$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer la monotonie de la fonction g^{-1} sur J, puis donner l'expression de g^{-1} pour $x \in J$.

Exercice 37

I/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 \times \sqrt[3]{x+1} - x$$

et soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère

For more visit: L9ray.com CamScanner

orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis étudier la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = -1$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f,

b) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $]5;6[$ tel que :

$$f(\alpha) = 0$$

c) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

II/ Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

1) Montrer que : $(\exists!\lambda_0 \in]2;3[)\,;\, g(\lambda_0) = \lambda_0$

2) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]-\infty;3[$

et que : $(g^{-1})'(\lambda_0) = \dfrac{4\lambda_0^2}{9-\lambda_0^2}$

c) Tracer (Γ) la courbe représentative de la fonction g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$g^{-1}(x) - \alpha < \dfrac{x\alpha^2}{9-\alpha^2}$ pour tout réel x de $]-\infty;0[$.

III/ On considère la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, on pose : $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, 0 \le u_n \le 3$

b) Montrer que la suite (x_n) est croissante et que la suite (y_n) est décroissante.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, x_n < \lambda_0 < y_n$, puis en déduire les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in [0;3])\,;\, |f'(x)| \le \left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)^2 \times |x_n - y_n|$

c) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

4) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \lambda_0$

Exercice 38

A) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos(Arc\tan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

B) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2Arc\tan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right) ; 0 \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \pi \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

2) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right[$.

3) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right[\right) ; f'(x) = \frac{5}{3} - \cos(f(x))$

4) Soit x un élément de l'intervalle $\left]0; \frac{3\pi}{4}\right[$.

a) Montrer que : $\left(\exists c \in \left]x; \frac{3\pi}{4}\right[\right) ; f(x) - \pi = \left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \times f'(c)$

b) En déduire que : $\frac{5}{3} - \cos(f(x)) < \frac{f(x) - \pi}{x - \frac{3\pi}{4}} < \frac{8}{3}$

c) Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}^-} \cos(f(x))$, en déduire que la fonction f est dérivable à gauche en $\frac{3\pi}{4}$ puis interpréter graphiquement le résultat.

5) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b) Etudier la concavité de la courbe (C).

c) Tracer la courbe (C).

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de J.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 39

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Etudier la parité de f.

2) Montrer que f est continue en 0.

3) Etudier la dérivabilité de f en 0 et donner une interprétation géométrique du résultat.

4) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (on rappelle que : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{Arc\tan(t)}{t} = 1$)

5) a) En utilisant théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \; ; \; \frac{x}{1+x^2} < Arc\tan(x) < x$$

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \; ; \; \frac{x^3}{1+x^2} < f(x) < x$

c) Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ admet la droite (D) d'équation $y = x$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

6) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \; ; f'(x) = 2x\, Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

7) Tracer $(\mathscr{C}_f)$.

8) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (Remarquer que $f(1) = \left(\frac{\pi}{4}\right)$)

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique a_n dans $]0; +\infty[$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) \; ; a_n < 1$

c) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

d) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 40

On considère la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=2\left(\frac{1}{1-\sin x}-1\right)$

1) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$

b) Déterminer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(2)$.

2) a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$ on a :

$$1-\sin(f^{-1}(x))=\frac{2}{2+x} \text{ et } \cos(f^{-1}(x))=\frac{2\sqrt{1+x}}{2+x}$$

b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $[0;+\infty[$.

c) Montrer que : $(\forall x\in[0;+\infty[);(f^{-1})'(x)=\frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

d) Montrer que : $(\forall x\in[0;+\infty[);0<(f^{-1})'(x)\leq\frac{1}{2}$

3) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases}u_0=2\\(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=f^{-1}(u_n)\end{cases}$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});0\leq u_n\leq 2$

b) Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que :

$$(\forall n\in\mathbb{N});0<u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$$

c) Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0<u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente en précisant sa limite.

4) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$(\forall n\geq 1);v_n=n\left(f^{-1}\left(u_n+\frac{2}{n}\right)-f^{-1}\left(u_n+\frac{1}{n}\right)\right)$$

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\left(\exists c_n\in\left]u_n+\frac{1}{n};u_n+\frac{2}{n}\right[\right);v_n=\frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$$

b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=0$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

Exercice 41

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-\infty;1]$ par :

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{Arc\tan(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} & ;x<1\\ f(1)=1\end{cases}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty;1]$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Pour tout réel a de l'intervalle $]-\infty;1]$, on considère la fonction numérique φ_a de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]-\infty;1]$ par :

$$\varphi_a(x)=(Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a})(\sqrt{1-x})^3-(Arc\tan(\sqrt{1-x})-(\sqrt{1-x}))(\sqrt{1-a})^3$$

a) Montrer que la fonction φ_a est continue sur l'intervalle $[a;1]$ et dérivable sur l'intervalle $]a;1[$.

b) Calculer $\varphi_a(1)$ et $\varphi_a(a)$ puis montrer que :

$$(\exists c\in]a;1[)\,;\ \frac{Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a}}{(\sqrt{1-a})^3}=\frac{1}{3(c-2)}$$

c) En déduire que : $(\forall x\in]-\infty;1[)\,;\ \frac{1}{3(2-x)}<\frac{f(x)-f(1)}{x-1}<\frac{1}{3}$

d) Montrer que la fonction f est dérivable à gauche en 1 et que : $f'_g(1)=\frac{1}{3}$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

3) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty;1]$ et que : $(\forall x\in]-\infty;1[)\,;\ f'(x)=\frac{1}{2(1-x)}\left(f(x)-\frac{1}{2-x}\right)$

b) Montrer que : $(\forall x>0)\,;\ \frac{x}{1+x^2}<Arc\tan(x)<x$ (T.A.F)

c) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;1]$.

d) Tracer la courbe (C).

4) a) Montrer que : $(\forall x<1)\,;\ f'(x)<\frac{1}{2(2-x)}$

b) En déduire que : $(\forall x\le 1)\,;\ |f'(x)|\le\frac{1}{2}$

c) Montrer que : $(\forall (x;y)\in]-\infty;1])\,;\ |f(x)-f(y)|\le\frac{1}{2}|x-y|$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 29

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x}-2)^2 = +\infty$

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt[3]{x}-2)^2 = +\infty$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Branche infinie:

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x}-2)^2 = +\infty$

Donc la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2) * La dérivabilité de f à droite en 0:

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a $f(0) = 0$ et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = (\sqrt[3]{x}-2)^2$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt[3]{x}-2)^2 = 4$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 4$

Signifie que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 4$

* Interprétation géométrique:

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente en son point d'abscisse 0, d'équation: $\begin{cases} y = 4x \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

3) * Calcul de $f'(x)$ où $x \in]0;+\infty[$:

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ qui sont: $x \mapsto \sqrt[3]{x}-2$ et $x \mapsto x$.

Et on a pour tout $x \in]0;+\infty[$:

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x} - 2)^2 + 2x(\sqrt[3]{x} - 2) \times \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 2}{3.\sqrt[3]{x^2}}\right).(3.\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} - 2) + 2x)$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)}{3.\sqrt[3]{x^2}} \cdot (5x - 6\sqrt[3]{x^2}) = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{x} - 2)(5\sqrt[3]{x} - 6)$$

* Signe de $f'(x)$ où $x > 0$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2$ où $\sqrt[3]{x} = \frac{6}{5}$

  $\Leftrightarrow x = 8$ où $x = \frac{216}{125}$

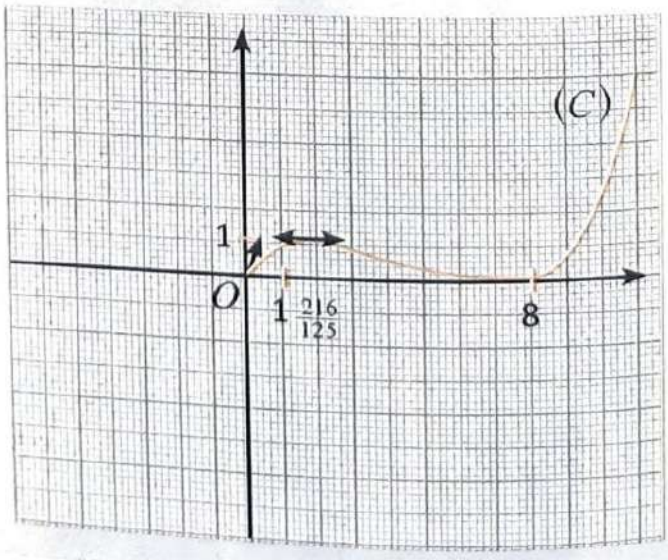
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{6}{5} < \sqrt[3]{x} < 2$

  $\Leftrightarrow \frac{216}{125} < x < 8$

* Tableau de variations de f :

x	0		$\frac{216}{125}$		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f\left(\frac{216}{125}\right)$	↘	0	↗	$+\infty$

4) Le tracé: $f\left(\frac{216}{125}\right) \simeq 1$ *et* $\frac{216}{119} \simeq 1,7$



For more visit: L9ray.com
CamScanner

Exercice 30

1) a) Le tableau de variations de la fonction de f :

• La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ et de plus:

$f'(x) = -\pi \sin(\pi x)$ donc: $(\forall x \in [0;1]) ; f'(x) \leq 0$

Et on a : $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0;1]$ et $f(0) = 2$; $f(1) = 0$

Ainsi le tableau de variations de f est :

x	0		1
$f'(x)$	0	$-$	
f	2	↘	0

b) Montrons que f admet une fonction réciproque :

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$.

D'après le théorème de la bijection réciproque, la fonction f réalise une bijection de $[0;1]$ sur $f([0;1]) = [f(1);f(0)] = [0;2]$

Par conséquent f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0;2]$.

2) • Montrons que f^{-1} est dérivable sur $]0;2[$:

La fonction f est dérivable sur $]0;1[$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]0;1[$, donc la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(]0;1[) =]f(1);f(0)[=]0;2[$

• Montrons que : $(\forall x \in]0;2[) ; (f^{-1}(x))' = \dfrac{-1}{\pi\sqrt{2x - x^2}}$

Soit x un élément de $]0;2[$, on a : $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{-1}{\pi . \sin(\pi f^{-1}(x))}$, car $f'(t) = -\pi . \sin(\pi t)$

Or $f(f^{-1}(x)) = 1 + \cos(\pi f^{-1}(x))$ c'est-à-dire : $\cos(\pi f^{-1}(x)) = x - 1$

Et puisque : $\cos^2(\pi . f^{-1}(x)) + \sin^2(\pi . f^{-1}(x)) = 1$ alors :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$\sin^2(\pi.f^{-1}(x)) = 1-(x-1)^2$

Donc : $|\sin^2(\pi.f^{-1}(x))| = \sqrt{2x-x^2}$

Or $f^{-1}(x) \in]0;1[\Rightarrow \pi.f^{-1}(x) \in]0;\pi[$, par suite : $\sin(\pi.f^{-1}(x)) = \sqrt{2x-x^2}$

D'où : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{\pi.\sqrt{2x-x^2}}$. Ainsi : $(\forall x \in]0;2[) ; (f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

3) • Déterminons $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f^{-1}(x)}{x-2}$:

Soit $x \in]0;2[$, on pose : $y = f^{-1}(x)$,

c'est-à-dire : $x = f(y)$

On a : $x \to 2 \iff y \to 0^+$

Donc : $\dfrac{f^{-1}(x)}{x-2} = \dfrac{y}{f(y)-2} = \dfrac{1}{\dfrac{f(y)-f(0)}{y-0}}$, car $f(0) = 2$

Or $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{f(y)-f(0)}{y-0} = 0^-$ donc : $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{y}{f(y)-2} = -\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f^{-1}(x)}{x-2} = -\infty$

• Déterminons $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f^{-1}(x)-1}{x}$:

Soit $x \in]0;2[$, on pose : $y = f^{-1}(x)$, c'est-à-dire : $x = f(y)$

On a : $x \to 0^+ \iff y \to 1^-$

Donc : $\dfrac{f^{-1}(x)-1}{x} = \dfrac{y-1}{f(y)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(y)-f(1)}{y-1}}$; car $f(1) = 0$

Or $\lim\limits_{y\to 1^-} \dfrac{f(y)-f(1)}{y-1} = 0^-$ donc : $\lim\limits_{y\to 1^-} \dfrac{y-1}{f(y)} = -\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f^{-1}(x)-1}{x} = -\infty$

4) a) Montrons que la fonction h est dérivable sur $]0;2[$:

La fonction $u : x \mapsto 2-x$ est dérivable sur $]0;2[$, f^{-1} est dérivable sur $]0;2[$ telles que $u(]0;2[) =]0;2[$, donc la fonction $f^{-1}ou$ est dérivable sur $]0;2[$.

Ainsi la fonction $h = f^{-1} + f^{-1}ou$ est dérivable sur $]0;2[$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Calculons $h'(x)$ où $x \in]0;2[$:

Soit $x \in]0;2[$, on a : $h'(x) = (f^{-1})'(x) + (f^{-1})'(u(x)) \times u'(x)$

Puisque : $u'(x) = -1$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{\pi.\sqrt{2x-x^2}}$

et $(f^{-1})'(u(x)) = \dfrac{-1}{\pi.\sqrt{2u(x)-(u(x))^2}} = \dfrac{-1}{\pi.\sqrt{4-2x-(4-4x+x^2)}} = \dfrac{-1}{\pi.\sqrt{2x-x^2}}$

Donc : $h'(x) = \dfrac{-1}{\pi.\sqrt{2x-x^2}} + \dfrac{1}{\pi.\sqrt{2x-x^2}} = 0$

Ainsi : $(\forall x \in]0;2[) ; h'(x) = 0$

b) • Calculons $h(1)$:

On a : $h(1) = f^{-1}(1) + f^{-1}(1) = 2f^{-1}(1)$

Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ signifie que : $f^{-1}(1) = \frac{1}{2}$

Donc : $h(1) = 1$

• Montrons que : $(\forall x \in [0;2]) \ ; \ h(x) = 1$

On a la fonction h est dérivable sur l'intervalle $]0;2[$

et $(\forall x \in [0;2]) ; h'(x) = 0$

Donc h est constante sur $]0;2[$.

Comme $h(1) = 1$ alors : $h(x) = 1$ pour tout $x \in]0;2[$.

Et on a : $h(0) = f^{-1}(0) + f^{-1}(2) = 1$ et $h(2) = 1$

Ainsi : $(\forall x \in [0;2]) ; h(x) = 1$

c) interprétation graphique :

On a : $(\forall x \in [0;2]) ; (2-x) \in [0;2]$ et $f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x) = 1$

C'est-à-dire : $(\forall x \in [0;2]) ; (2 \times 1 - x) \in [0;2]$

et $f^{-1}(2 \times 1 - x) + f^{-1}(x) = 2 \times \frac{1}{2}$

Donc le point $\Omega\left(1;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f^{-1} dans un repère donné.

Exercice 31

1) a) Déterminons D :

On a : $f(x) = Arc\tan(2x\sqrt{1-x}) + \frac{\pi}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit x un réel, on a : $x \in D \iff 1-x \geq 0$

$\iff x \leq 1$

$\iff x \in]-\infty;1]$

Donc : $D =]-\infty;1]$

b) • Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x\sqrt{1-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Arc\tan X = -\frac{\pi}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan(2x\sqrt{1-x}) = -\frac{\pi}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan(2x\sqrt{1-x}) + \frac{\pi}{2} = 0$

• Interprétation graphique :

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.

2) Etude de la dérivabilité de f à gauche en 1:

Soit x un réel, on a : $f(1) = \frac{\pi}{2}$

et $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{Arc\tan(2x\sqrt{1-x})}{x-1} = \frac{Arc\tan(2x\sqrt{1-x})}{2x\sqrt{1-x}} \times \frac{2x\sqrt{1-x}}{x-1}$

On pose : $t = 2x\sqrt{1-x}$, on a : $x \to 1^- \iff t \to 0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{Arc\tan(2x\sqrt{1-x})}{2x\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{t\to0^+} \frac{Arc\tan t}{t} = (Arc\tan)'(1) = 1$

Et on a : $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{2x\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim\limits_{t\to0^+} \left(\frac{-2x}{\sqrt{1-x}}\right) = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ signifie que la fonction f n'est pas dérivable à gauche en 1.

• Interprétation graphique :

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale à gauche en son point d'abscisse 1; dirigée vers le haut.

3) a) Calcul de $f'(x)$ où $x < 1$:

For more visit: L9ray.com CamScanner

La fonction $u: x \mapsto 2x\sqrt{1-x}$ est dérivable sur l'intervalle $]-\infty;1[$, il s'ensuit que le fonction $Arc\tan$ ou est dérivable sur $]-\infty;1[$

Donc le fonction f l'est aussi:

Et on a: $(\forall x < 1)\ ;\ f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

Or: $(\forall x < 1)\ ;\ u'(x) = 2\sqrt{1-x} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$

Ainsi: $(\forall x \in]-\infty;1[)\ ;\ f'(x) = \dfrac{2-3x}{\sqrt{1-x}(1+4x^2(1-x))}$

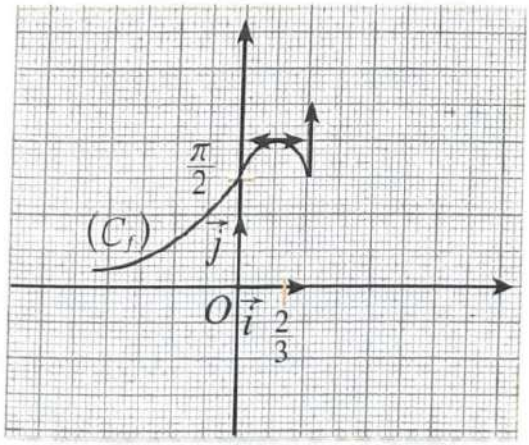
b) Tableau de variations de f :

Puisque le signe de $f'(x)$ est celui de $2-3x$ sur l'intervalle $]-\infty;1[$

alors le tableau de variations de f est comme suit:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
f	0	↗	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	↘	$\frac{\pi}{2}$

c) La courbe de $(\mathscr{C})$



For more visit: L9ray.com
CamScanner

L9RAY

Exercice 32

1) a) Le tableau de variations de la fonction f :

• On a: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} 1 = 1$

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que:

$(\forall x \in \mathbb{R})$;

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+1) - 2x(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)(x^2+1-x^2-x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(1-x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Par suite le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x^2$, donc le tableau de variations de f est:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	↘	0	↗	2	↘	1

b) * Vérifions que: $f([1;2]) \subset [1;2]$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1;2]$

donc: $f([1;2]) = [f(2);f(1)] = \left[\frac{9}{5};2\right]$

Et puisque $1 < \frac{9}{5} < 2$ alors $\left[\frac{9}{2};2\right] \subset [1;2]$

Ainsi: $f([1;2]) \subset [1;2]$

* Montrons que: $(\forall x \in [1;+\infty[)$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

Soit x un élément de $[1;+\infty[$, on a: $f'(x) \leq 0$

Donc: $|f'(x)| = -f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

Par suite:

$$|f'(x)| - \frac{1}{4} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4} = \frac{8(x^2-1)-(x^2+1)^2}{4(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{(x^4+2x^2+1-8x^2+8)}{4(x^2+1)^2} = -\frac{(x^4-6x^2+9)}{4(x^2+1)^2} = -\frac{(x^2-3)^2}{4(x^2+1)^2}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et comme $-\frac{(x^2-3)^2}{4(x^2+1)^2} \leq 0$ alors $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

D'où: $(\forall x \in [1;+\infty[) \ ; |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

c) Montrons que: $(\exists! \alpha \in]1;2[) / f(\alpha) = \alpha$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1;2[$ par: $g(x) = f(x) - x$

La fonction g est dérivable sur $]1;2[$ et que:

$(\forall x \in]1;2[) \ ; \ g'(x) = f'(x) - 1$

Comme $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]1;2[$ alors $g'(x) < 0$ pour tout $x \in]1;2[$ c'est-à-dire la fonction est strictement décroissante sur $]1;2[$.

Donc la fonction g est continue et strictement décroissante sur $]1;2[$ donc elle réalise une bijection de $]1;2[$ sur $g(]1;2[)$ où

$$g(]1;2[) = \left]\lim_{x \to 2^-} g(x) ; \lim_{x \to 1^+} g(x)\right[=]g(2) ; g(1)[= \left]-\frac{1}{5} ; 1\right[$$

Comme $0 \in \left]-\frac{1}{5};1\right[$ alors il existe un unique réel $\alpha \in]1;2[$ tel que $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$

Ainsi: $(\exists \alpha \in]1;2[) / f(\alpha) = \alpha$

Signifie que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;2[$.

2) a) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq 2$

En utilisant un raisonnement par récurrence.

- Initialisation:

• Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $1 \leq 2 \leq 2$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$

- Hérédité:

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leq u_n \leq 2$ et montrons que: $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

On a: $1 \leq u_n \leq 2$ et $f([1;2]) \subset [1;2]$ donc $f(u_n) \in [1;2]$

C'est-à-dire $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq 2 \quad \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$

• Conclusion: D'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq 2$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) Remarque:

• Soit n un entier naturel, on a:

$x_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{(2n+1)+1} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(x_n))$

Et $y_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = f(u_{2(n+1)}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(y_n))$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_{n+1} = fof(x_n)$ et $y_{n+1} = fof(y_n)$

• On a la fonction f est strictement décroissante sur $[1;2]$ et $f([1;2]) \subset [1;2]$ donc la fonction fof est strictement croissante sur $[1;2]$.

i) * Montrons que la suite (x_n) décroissante.

C'est-à-dire: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_{n+1} \leq x_n$ en utilisant un raisonnement par récurrence:

- Initialisation:

• Pour $n = 0$, on a: $x_0 = u_0 = 2$ et $x_1 = u_2$

comme $u_2 \leq 2$ alors $x_1 \leq x_0$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

- Hérédité:

• Soit n un entier naturel , supposons que $x_{n+1} \leq x_n$ et montrons que $x_{n+2} \leq x_{n+1}$.

On a x_{n+1} et x_n sont des éléments de $[1;2]$ et la fonction fof est croissante sur $[1;2]$, donc: $x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow fof(x_{n+1}) \leq fof(x_n)$

$\Rightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$

• Conclusion: D'après le principe de récurrence:

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_{n+1} \leq x_n$

Signifie que la suite (x_n) est décroissante.

* Montrons que la suite (y_n) est croissante.

C'est-à-dire: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_n \leq y_{n+1}$, en utilisant un raisonnement par récurrence.

- Initialisation:

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Pour $n = 0$, on a: $u_2 \leq u_0$ alors $f(u_0) \leq f(u_2)$ c'est-à-dire $u_1 \leq u_3$ signifie que $y_0 \leq y_1$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

- Hérédité:

• Soit n un entier naturel, supposons que $y_n \leq y_{n+1}$ et montrons que $y_{n+1} \leq y_{n+2}$

On a y_n et y_{n+1} sont deux éléments de $[1;2]$ et la fonction fof est croissante sur $[1;2]$, donc: $y_n \leq y_{n+1} \Rightarrow fof(y_n) \leq fof(y_{n+1})$

$$\Rightarrow y_{n+1} \leq y_{n+2}$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_n \leq y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} \leq y_{n+2}$

• Conclusions: D'après le principe de récurrence, on a:

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_n \leq y_{n+1}$

Signifie que la suite (y_n) est croissante.

ii) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_n < \alpha < x_n$

• On a: $1 < \alpha < 2$ et la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$, donc $f(2) < f(\alpha) < f(1)$

C'est-à-dire : $\frac{9}{5} < \alpha < 2$ par suite $y_0 < \alpha < x_0$

C'est-à-dire la propriété est vraie pour $n = 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $y_n < \alpha < x_n$ et montrons que:

$y_{n+1} < \alpha < x_{n+1}$

On a: x_n, y_n et α_n sont des éléments de $[1;2]$, la fonction fof est strictement sur $[1;2]$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc $y_n < \alpha < x_n \Rightarrow fof(y_n) < fof(\alpha) < fof(x_n)$

$$\Rightarrow y_{n+1} < \alpha < x_{n+1}$$

• Conclusion: D'après le principe de récurrence:

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_n < \alpha < x_n$

c) i) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot |x_n - y_n|$

La fonction f est dérivable sur $[1;2]$ et $f([1,2]) \subset [1;2]$

donc la fonction fof est dérivable sur $[1;2]$ et que $(\forall x \in [1;2])$;

For more visit: L9ray.com CamScanner

$(fof)'(x) = f'(f(x)) \times f'(x)$.

Et comme $|f'(t)| \leq \frac{1}{4}$ pour $t \in [1;2]$ alors:

$|(fof)'(x)| = |f'(x)| \times |f'(f(x))| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2$ pour $x \in [1;2]$

Donc la fonction fof est dérivable sur $[1;2]$ et que:

$(\forall x \in [1;2])$; $|(fof)'(x)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Par suite, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a:

$(\forall n \in \mathbb{N})$, $|fof(x_n) - fof(y_n)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot |x_n - y_n|$

équivaut à $(\forall n \in \mathbb{N})$, $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot |x_n - y_n|$

u) Montrons que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

* Montrons par récurrence que:

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $|x_n - y_n| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^n \cdot |x_0 - y_0|$

- Initialisation:

• Pour $n = 0$, on a $|x_0 - y_0| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^0 \cdot |x_0 - y_0|$

- Hérédité:

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|x_n - y_n| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^n \cdot |x_0 - y_0|$

et montrons que: $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^n + 1 \cdot |x_0 - y_0|$

On a: d'après la question précédente: $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \frac{1}{16} \cdot |x_n - y_n|$

Et on a: $|x_n - y_n| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^n |x_0 - y_0| \Rightarrow \frac{1}{16} \cdot |x_n - y_n| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} \cdot |x_0 - y_0|$

Donc $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} \cdot |x_0 - y_0|$

* Conclusion: D'après le principe de récurrence:

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $|x_n - y_n| \leq \left(\frac{1}{16}\right)^n \cdot |x_0 - y_0|$

• On a: $-1 < \frac{1}{16} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n = 0$

c'est-à-dire: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n \cdot |x_0 - y_0| = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc: $\lim_{n\to+\infty}|x_n-y_n|=0$ signifie $\lim_{n\to+\infty}x_n-y_n=0$

Et de plus la suite (x_n) est décroissante et la suite (y_n) est croissante.

Par conséquent les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

d) Montrons que: $\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=\alpha$

Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont la même limite.

Soit $n\in\mathbb{N}$, on a: $|x_n-\alpha|=x_n-\alpha$ car $\alpha<x_n$

Comme $y_n<\alpha$ alors $-\alpha<-y_n$ donc $|x_n-\alpha|<x_n-y_n$

Par suite: $\begin{cases}(\forall n\in\mathbb{N});|x_n-\alpha|<x_n-y_n\\ \lim_{n\to+\infty}x_n-y_n=0\end{cases}$

donc, d'après les critères de convergence: $\lim_{n\to+\infty}x_n=\alpha$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=\alpha$.

Exercice 33

I) 1) Montrons que: $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)>2$:

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont $Arc\tan$ et $x\mapsto 2x-1$

Et que: $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+2$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a: $f'(x)-2=\frac{1}{1+x^2}$ et $\frac{1}{1+x^2}>0$ donc $f'(x)-2>0$

c'est-à-dire $f'(x)>2$

Ainsi: $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)>2$

2) Montrons que f admet réciproque f^{-1}

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(car $f'(x)>2>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$)

Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$

Comme $\lim_{x\to+\infty}Arc\tan x=\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty}Arc\tan x=-\frac{\pi}{2}$, alors

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, donc: $f(\mathbb{R})=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

3) Montrons que $(\exists!\alpha \in \mathbb{R}) / f(\alpha) = \alpha$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = f(x) - x$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que:

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x^2} + 1$

Il s'ensuit que: $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Et puisque g est continue sur $\mathbb{R}$ alors elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire: $f(\alpha) = \alpha$

* Montrons que: $0 < \alpha < 1$

On a: $g(0) = -1$ et $g(1) = \frac{\pi}{4}$ donc $g(0) < 0 < g(1)$

c'est-à-dire: $g(0) < g(\alpha) < g(1)$

Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $0 < \alpha < 1$.

4) Montrons que $(\forall x \in]\alpha; +\infty[)$; $f(x) > x$:

La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc:

$$\begin{aligned} x > \alpha &\Rightarrow g(x) > g(\alpha) \\ &\Rightarrow f(x) - x > 0 \\ &\Rightarrow f(x) > x \end{aligned}$$

Donc: $(\forall x \in]\alpha; +\infty[)$; $f(x) > x$

II) 1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > \alpha$

En utilisant un raisonnement par récurrence:

- Initialisation:

• Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et $a > \alpha$ donc $u_0 > \alpha$

- Hérédité:

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > \alpha$ et montrons que $u_{n+1} > \alpha$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et comme $f(\alpha)=\alpha$ alors $f^{-1}(\alpha)=\alpha$

Par conséquent $u_n>\alpha \Rightarrow f^{-1}(u_n)>f^{-1}(\alpha)$

$\Rightarrow u_{n+1}>\alpha$

Donc: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>\alpha \Rightarrow u_{n+1}>\alpha$

Conclusion: D'après le principe de récurrence on a:

$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>\alpha$

2) * Etude de la monotonie de (u_n):

On a: $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)>x$

Soit $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n>\alpha$ donc $f(u_n)>u_n$

Et comme f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors:

$$f(u_n)>u_n \Rightarrow f^{-1}(f(u_n))>f^{-1}(u_n)$$
$$\Rightarrow u_n>f^{-1}(u_n)$$
$$\Rightarrow u_n>u_{n+1}$$

Donc: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<u_n$

Signifie que la suite (u_n) est strictement décroissante.

* Déduction:

La suite (u_n) est décroissante et minorée par le réel α, donc elle est convergente.

3) Montrons que: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}-\alpha<\frac{1}{2}(u_n-\alpha)$

Soit $n\in\mathbb{N}$

La fonction f^{-1} est continue sur $[\alpha;u_n]$ et dérivable sur $]\alpha;u_n[$

donc, d'après le théorème des accroissements finis:

$(\exists c\in]\alpha;u_n[)/f^{-1}(u_n)-f^{-1}(\alpha)=(u_n-\alpha)(f^{-1})'(c)$

c'est-à-dire: $(\exists c\in]\alpha;u_n[)/u_{n+1}-\alpha=(u_n-\alpha)(f^{-1})'(c)$

Et puisque $(\forall x\in\mathbb{R})$, $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ alors $(f^{-1})'(c)=\frac{1}{f'(f^{-1}(c))}$

On a $f'(x)>2$ pour tout réel x donc $f'(f^{-1}(c))>2$

Il s'ensuit que $\frac{1}{f'(f^{-1}(c))}<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire: $(f^{-1})'(c)<\frac{1}{2}$

Et comme $u_n-\alpha>0$ alors $(u_n-\alpha)(f^{-1})'(c)<\frac{1}{2}(u_n-\alpha)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

c'est-à-dire: $u_{n+1}-\alpha<\frac{1}{2}(u_n-\alpha)$

Finalement: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}-\alpha<\frac{1}{2}(u_n-\alpha)$

4) Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

Montrons par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0<u_n-\alpha\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(u_0-\alpha)$

- Initialisation:

• Pour $n=0$, on a $u_0-\alpha>0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot(u_0-\alpha)=u_0-\alpha$

Donc: $0<u_0-\alpha\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot(u_0-\alpha)$

- Hérédité:

• Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $0<u_n-\alpha\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(u_0-\alpha)$

et montrons que $0<u_{n+1}-\alpha\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot(u_0-\alpha)$

On a d'après la question précédente:

$u_{n+1}-\alpha\leq\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(u_n-\alpha)$ et $\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot|u_0-\alpha|$

donc: $u_{n+1}-\alpha\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot(u_0-\alpha)$ et $0<u_{n+1}-\alpha$

D'où $0<u_{n+1}-\alpha\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot(u_0-\alpha)$

Par suite $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0<u_n-\alpha\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(u_0-\alpha)$

Comme $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$. par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

Exercice 34

1) a) * Déterminons D

Soit x un réel , on a:

$$x\in D\Leftrightarrow x\neq 0\ \text{ et }\ \frac{x+1}{x}\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow x\neq 0\ \text{ et }\ x(x+1)\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow x\in\ ]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$$

Donc: $D=\ ]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$

* Calcul des limites de f :

• On a $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}1+\frac{1}{x}=1$ et la fonction $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ est continue en 1.

For more visit: L9ray.com CamScanner

donc $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}=1$

Par suite: $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}=-\infty$

• On a $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}=+\infty$

Par suite $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x-\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}=-\infty$

c) Branches infinies

• On a $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale de la courbe $(\mathscr{C})$.

• On a: $(\forall x\in D)\ ;\ f(x)=x-1-\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}-1\right)$

Et comme: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}-1\right)=0$ alors $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)-(x-1)=0$

Donc la droite d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique de la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

2) • Etude de la dérivabilité de f à gauche en -1:

Soit $x\in]-\infty;-1[$, on a $f(-1)=-1$

et $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\dfrac{x-\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x}}+1}{x+1}=1+\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}}{\sqrt[3]{-(x+1)^3}}=1+\sqrt[3]{\dfrac{-1}{x(x+1)^2}}$

Comme $\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{-1}{x(x+1)^2}\right)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-1^-}\sqrt[3]{\dfrac{-1}{x(x+1)^2}}=+\infty$

Par suite $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$

Ainsi la fonction f n'est pas dérivable à gauche en -1

• Interprétation géométrique:

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale à gauche en son point d'abscisse -1, dirigée vers le bas.

3) a) Calcul de la dérivée de f :

La fonction f est dérivable en tout point de $D-\{-1\}$ et que:

$$(\forall x\in D\setminus\{-1\})\ ;\ f'(x)=1-\frac{-\frac{1}{x^2}}{3.\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}=1+\frac{1}{3x^2.\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) Tableau de variations de f :

On a: $(\forall x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[)\ ;\ f'(x)>0$

signifie que la fonction f est strictement croissante sur les deux intervalles $]-\infty;-1]$ et $]0;+\infty[$

Par suite le tableau de variations de f est:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖		‖		$+$
f	$-\infty$	↗	-1	‖	‖	↗	$+\infty$

4) a) Montrons que g admet une fonction réciproque

La fonction $u: x \mapsto \dfrac{x+1}{x}$ est continue et positive sur $]0;+\infty[$

donc la fonction $\sqrt[3]{u}$ est continue sur $]0;+\infty[$, par suite g est continue sur $]0;+\infty[$.

Et comme g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ alors elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur l'intervalle $J = g(]0;+\infty[)$ où $J = \left]\lim\limits_{x\to 0^+} g(x); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

Par conséquent g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrons que $(\exists!\alpha \in]0;+\infty[)/g(\alpha)=0$ et que: $1<\alpha<2$

La fonction g est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

Et comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel $\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$

On a: $g(1)=1-\sqrt[3]{2}$ et $g(2)=2-\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$ alors $g(1)<0<g(2)$

c'est-à-dire $g(1)<g(\alpha)<g(2)$

Et comme g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ alors $1<\alpha<2$.

c) * Montrons que g^{-1} est dérivable sur J :

La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x)\neq 0$ pour tout réel $x \in]0;+\infty[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc la fonction g^{-1} est dérivable sur $g(]0;+\infty[)=\mathbb{R}$

* Montrons que: $(g^{-1})'(0)=\dfrac{3\alpha^4}{1+3\alpha^4}$

On a: $g(\alpha)=0$ alors $g^{-1}(0)=\alpha$, par suite $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{g'(\alpha)}$

Et comme: $g'(\alpha)=1+\dfrac{1}{3\alpha^2.\left(\sqrt[3]{\dfrac{\alpha+1}{\alpha}}\right)^2}$ et

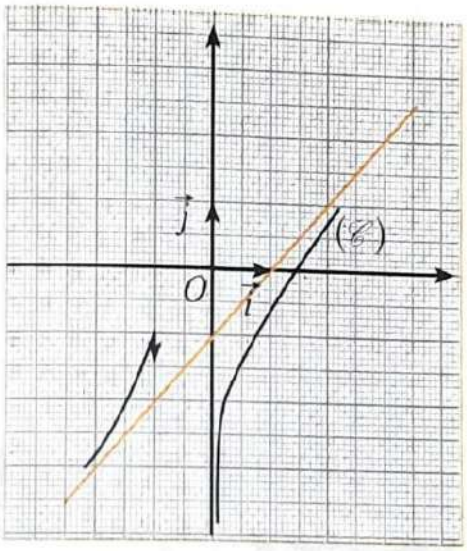
$$g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{\alpha+1}{\alpha}}=\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)^2=\alpha^2$$

alors $g'(\alpha)=1+\dfrac{1}{3\alpha^4}=\dfrac{3\alpha^4+1}{3\alpha^4}$

Ainsi: $(g^{-1})'(\alpha)=\dfrac{3\alpha^4}{1+3\alpha^4}$

d) La courbe:



Exercice 35

I) 1) • Montrons que la fonction g est continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\tan x}{x}$ est continue sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ qui sont : $x \longmapsto \tan x$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x}{x}=1$ et $g(0)=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=g(1)$ signifie que la fonction g est continue à droite en 0

D'où la fonction g est continue sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Calcul de $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0$ avec $\cos x > 0$ pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$, par suite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty$

2) a) Montrons que : $0 < \tan(x) - x < x \cdot \tan^2(x)$, où $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

La fonction $\varphi : t \longmapsto \tan(t) - t$ est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$

. D'après le théorème des accroissements finis :

$$(\exists c \in]0;x[) \ ; \ \varphi(x) - \varphi(0) = (x-0)\varphi'(c)$$

Et puisque $\left(\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) \ ; \ \varphi'(t) = \tan^2(t)$ alors $\varphi'(c) = \tan^2(c)$

Donc : $(\exists c \in]0;x[) \ ; \ \tan(x) - x = x \times \tan^2(c)$

Et on a la fonction tan est strictement croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,

donc : $0 < c < x < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < \tan(c) < \tan(x)$

$\Longrightarrow 0 < \tan^2(c) < \tan^2(x)$

Comme $x > 0$ alors $0 < x\tan^2(c) < x \cdot \tan^2(x)$

D'où : $0 < \tan(x) - x < x \cdot \tan^2(x)$

Ainsi : $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) \ ; \ 0 < \tan(x) - x < x \cdot \tan^2(x)$

b) Montrons que la fonction g est dérivable à droite en $x_0 = 0$

Soit x un élément de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left(\frac{\tan x}{x} - 1\right) = \frac{\tan(x)-x}{x^2}$$

Et d'après la question précédente, on a : $0 < \tan(x) - x < x\tan^2(x)$

Donc : $0 < \frac{\tan(x)-x}{x^2} < \frac{\tan^2(x)}{x}$, c'est-à-dire : $0 < \frac{g(x)-g(0)}{x-0} < \frac{\tan^2(x)}{x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \tan x = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tan^2(x)}{x} = 0$

Par suite on a : $\begin{cases} \left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) \ ; \ 0 < \frac{g(x)-g(0)}{x-0} < \frac{\tan^2(x)}{x} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tan^2(x)}{x} = 0 \end{cases}$

Donc : d'après les propriétés de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

c'est-à-dire la fonction g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$

3) a) Tableau de variations de g :

La fonction g est dérivable sur $]0;\frac{\pi}{2}[$, et on a :

$$\left(\forall x \in]0;\frac{\pi}{2}[\right) \; ; \; g'(x) = \frac{x(1+\tan^2 x) - \tan x}{x^2}$$

Et d'après la question 2) a) on a : $\tan(x) - x < x\tan x^2(x)$

c'est-à-dire : $0 < x(1+\tan^2(x)) - \tan x$ pour $x \in]0;\frac{\pi}{2}[$

Donc : $g'(x) > 0$ pour tout réel $x \in]0;\frac{\pi}{2}[$

c'est-à-dire la fonction g est strictement croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, par suite le tableau de variations de la fonction g est :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	0	$+$	
g	1	$\longrightarrow$	$+\infty$

b) Montrons que la fonction g est une bijection :

La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}[$, donc elle réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ sur l'intervalle $J = g\left([0;\frac{\pi}{2}[\right)$

où $J = \left[g(0); \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x)\right[= [1;+\infty[$

II) 1) a) Montrons que la fonction f est continue sur $[0;\frac{\pi}{2}]$

• La fonction g est continue sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ et la fonction $Arc\tan$ est continue sur $\mathbb{R}$ telles que $g\left([0;\frac{\pi}{2}[\right) \subset \mathbb{R}$, donc la fonction $f = Ar\tan og$ est continue sur $[0;\frac{\pi}{2}[$

• On a : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} Arc\tan X = \frac{\pi}{2}$,

donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} Arc\tan(g(x)) = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ signifie la fonction f est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

Ainsi la fonction f est continue sur $[0;\frac{\pi}{2}]$

b) • Étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit x un élément de $]0;\frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{Arc\tan(g(x))-\frac{\pi}{4}}{x-0}=\left(\frac{Ar\tan(g(x))-\frac{\pi}{4}}{g(x)-1}\right)\times\left(\frac{g(x)-1}{x-0}\right)$$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-1}{x-0}=0$ Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{Arc\tan(g(x))-\frac{\pi}{4}}{g(x)-1}$

On pose : $t=g(x)$, alors $x\longmapsto 0^+$ équivaut à $t\longmapsto 1^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{Arc\tan(g(x))-\frac{\pi}{4}}{g(x)-1}=\lim\limits_{t\to 1^+}\frac{Arc\tan t-Arc\tan 1}{t-1}=(Arc\tan)'(1)=\frac{1}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ signifie que la fonction f est dérivable à droite en $x_0=0$ et que : $f'_d(0)=0$

• Interprétation géométrique :

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente horizontale à droite en son point d'abscisse $x_0=0$ (d'équation : $y=\frac{\pi}{4}$ et $x\geqslant 0$)

2) a) Montrons que : $(\forall t>0)\ ;\ Arc\tan(t)+Arc\tan\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi}{2}$

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$h(t)=Arc\tan(t)+Arc\tan\left(\frac{1}{t}\right)$$

La fonction h est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, et on a :

$$(\forall t>0)\ ;\ h'(t)=\frac{1}{1+t^2}+\frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}=0$$

Donc : $(\exists c\in\mathbb{R})/(\forall t\in]0;+\infty[)\ ;\ h(t)=c$

Comme $h(1)=Arc\tan(1)+Arc\tan(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

Ainsi : $(\forall t\in]0;+\infty[)\ ;\ Arc\tan(t)+Arc\tan\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi}{2}$

b) Montrons que f est dérivable à gauche en $x_1=\frac{\pi}{2}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;\frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{Arc\tan(g(x))-\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$$

Comme $g(x)>1$ alors $Arc\tan(g(x))-\frac{\pi}{2}=-Arc\tan\left(\frac{1}{g(x)}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{Arc\tan\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = -\left(\dfrac{Arc\tan\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{\frac{1}{g(x)}}\right)\times\left(\dfrac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot g(x)}\right)$

• On pose : $t = \dfrac{1}{g(x)}$, alors $x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}^- \Longleftrightarrow t \longrightarrow 0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{Arc\tan\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{Arc\tan t}{t} = 1$

• On pose : $X = x - \dfrac{\pi}{2}$, alors $x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}^- \Longleftrightarrow X \longrightarrow 0^-$

Et : $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)g(x) = \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\dfrac{\tan(x)}{x} = X\cdot\dfrac{\tan\left(X+\frac{\pi}{2}\right)}{X+\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{X}{\tan X}\cdot\dfrac{1}{X+\frac{\pi}{2}}$

Comme $\lim\limits_{X\to 0^-}\dfrac{\tan X}{X} = 1$ et $\lim\limits_{X\to 0^-}\left(\dfrac{1}{X+\frac{\pi}{2}}\right) = \dfrac{2}{\pi}$

alors $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot g(x) = \lim\limits_{X\to 0^-}\left(\dfrac{-X}{\tan x}\times\dfrac{1}{X+\frac{\pi}{2}}\right) = -\dfrac{2}{\pi}$

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot g(x)} = \dfrac{\pi}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$ signifie que la fonction f est dérivable à gauche en $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$

3) Tableau de variations de f :

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

et que : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$

Comme $g'(x) > 0$ pour $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors $f'(x) > 0$ pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

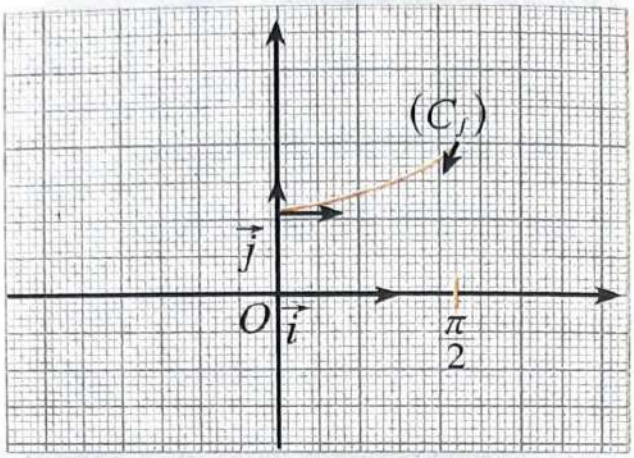
Donc la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Ainsi le tableau de variations de f est :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	
f	$\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) La courbe $(\mathscr{C})$



Exercice 36

1) a) Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $\left(\exists! \alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $\tan\alpha = x$

Alors : $\tan\alpha = x \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{\tan\alpha}$

$\iff \frac{1}{x} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Or $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \iff 0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$

Donc : $\frac{\pi}{2} - \alpha = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

Comme $\tan\alpha = x$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ alors $\alpha = Arc\tan(x)$

Par suite $\frac{\pi}{2} - Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

Ainsi : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) Montrons que f est continue sur $[0;+\infty[$

• La fonction $u : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc la fonction $Arc\tan ou$ est continue sur $]0;+\infty[$

La fonction $v : x \longmapsto \pi Arc\tan x$ continue et positive sur $]0;+\infty[$ donc la fonction $\sqrt{v}$ est continue sur $]0;+\infty[$

Par conséque la fonction $f = Arc\tan ou + \sqrt{v}$ est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions continues sur $]0;+\infty[$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} Arc\tan X = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\pi Arc\tan x}=\sqrt{0}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\pi Arc\tan x}=\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

signifie que f est continue à droite en 0

Il s'ensuit que la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$

2) • Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)=Arc\tan 0=0$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\pi Arc\tan(x)=\frac{\pi^2}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\pi Arc\tan x}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

• Interprétation graphique

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$, donc la droite $y=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ est une asymptote de la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$

3) a) Étude de la dérivabilité de f à droite en 0

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}-Arc\tan(x)$, donc :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\pi Arc\tan(x)}-\frac{\pi}{2}}{x}=\frac{-Arc\tan(x)+\sqrt{\pi Arc\tan(x)}}{x}$$

$$=-\frac{Arc\tan x}{x}+\sqrt{\frac{\pi}{x}\times\frac{Arc\tan x}{x}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{Arc\tan x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\pi}{x}=+\infty$,

alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{Arc\tan x}{x}+\sqrt{\frac{\pi}{x}\times\frac{Arc\tan x}{x}}\right)=+\infty$

c'est-à-dire la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0

• Interprétation géométrique

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale à droite en son point d'abscisse 0, dirigée vers le haut

b) Calcul de $f'(x)$ où $x\in]0;+\infty[$

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$

Pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\frac{\pi}{1+x^2}}{2\sqrt{\pi Arc\tan x}}=\frac{-1}{1+x^2}+\frac{\pi}{2(1+x^2)\sqrt{\pi\cdot Arc\tan x}}$$

$$=\frac{\pi-2\sqrt{\pi Arc\tan x}}{2(1+x^2)\sqrt{\pi\cdot Arc\tan x}}=\frac{\pi^2-4\pi Arc\tan x}{2(1+x^2)(\pi+2\sqrt{\pi\cdot Arc\tan x})\cdot\sqrt{\pi\cdot Arc\tan x}}$$

• Étude du signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

On a : $2(1+x^2)(\pi+2\sqrt{\pi\cdot Arc\tan x})\sqrt{\pi\cdot Arc\tan x}>0$

pour tout $x\in]0;+\infty[$

Donc la signe de $f'(x)$ est celui de $\pi^2-4\pi Arc\tan(x)$ où $x\in]0;+\infty[$

On a : $\pi^2-4\pi Arc\tan(x)=4\pi\left(\frac{\pi}{4}-Arc\tan x\right)$, alors:

- $f'(x)=0\iff x=1$
- $f'(x)<0\iff x\in]1;+\infty[$
- $f'(x)>0\iff x\in]0;1[$

c) Tableau de variations de fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{3\pi}{4}$	↘	$\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

4) a) Montrons que g admet une fonction réciproque :

La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur l'intervalle $J=g(I)$

où $J=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}g(x);g(1)\right]=\left]\frac{\pi\sqrt{2}}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

Par suite g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J=\left]\frac{\pi\sqrt{2}}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

b) • La monotonie de g^{-1}

Les fonctions g et g^{-1} ont le même sens de variations,

donc la fonction g^{-1} est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi\sqrt{2}}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

• L'expression de $g^{-1}(x)$ où $x\in J$

Soit $x\in\left]\frac{\pi\sqrt{2}}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$ et $y\in[1;+\infty[$ tels que : $g^{-1}(x)=y$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $g^{-1}(x)=y \Longleftrightarrow g(y)=x$

$\Longleftrightarrow Arc\tan\left(\frac{1}{y}\right)+\sqrt{\pi\cdot Arc\tan y}=x$

$\Longleftrightarrow \frac{\pi}{2}-Arc\tan y+\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{Arc\tan y}=x$

$\Longleftrightarrow Arc\tan y-\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{Arc\tan y}+x-\frac{\pi}{2}=0$; $(*)$

On pose : $Y=\sqrt{Arc\tan y}$ où $Y\in\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2};\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right[$

Donc l'égalité $(*)$ devient : $Y^2-\sqrt{\pi}Y+x-\frac{\pi}{2}=0$

Résolvons l'équation (E) : $Y^2-\sqrt{\pi}.Y+x-\frac{\pi}{2}=0$ dont l'inconnue est Y :

Le discriminant de (E) est : $\Delta=\pi-4x+2\pi=3\pi-4x$, on a : $\Delta\geqslant 0$

Par suite les solutions de (E) sont :

$Y_1(x)=\frac{\sqrt{\pi}+\sqrt{3\pi-4x}}{2}$ et $Y_2(x)=\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{3\pi-4x}}{2}$

Comme : $Y_1(x)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{3\pi-4x}}{2}$ et $Y_2(x)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}=-\frac{\sqrt{3\pi-4x}}{2}$

alors $Y_2(x)\notin\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2};\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right[$

Donc : $g^{-1}(x)=y \Longleftrightarrow \sqrt{Arc\tan y}=\frac{\sqrt{\pi}+\sqrt{3\pi-4x}}{2}$

$\Longleftrightarrow Arc\tan y=\left(\frac{\sqrt{\pi}+\sqrt{3\pi-4x}}{2}\right)^2$

$\Longleftrightarrow y=\tan\left(\pi-x+\frac{\sqrt{3\pi^2-4\pi x}}{2}\right)$

$\Longleftrightarrow y=-\tan\left(x-\frac{\sqrt{3\pi^2-4\pi x}}{2}\right)$

Ainsi : $\left(\forall x\in\left]\frac{\pi\sqrt{2}}{2};\frac{3\pi}{4}\right]\right)$; $f^{-1}(x)=-\tan\left(x-\frac{\sqrt{3\pi^2-4\pi x}}{2}\right)$

Exercice 37

I) 1) a) • Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a

$f(x)=3\cdot\sqrt[3]{x+1}-x=3x\times\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-x=x\left(3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-1\right)$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=0$ par suite

$\lim\limits_{x\to+\infty}3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-1=-1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-1\right) = -\infty$

• Branche infinie :

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ donc la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-1 = -1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3\cdot\sqrt[3]{1+x} = +\infty$

alors la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$

b) • Étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = -1$

Soit $x \in]-1;+\infty[$, on a : $f(-1) = 1$

et $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{x+1}-x-1}{x+1} = -1+3\times\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x+1)^3}} = -1+3\times\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}}$

Puisque $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty$ signifie que la fonction f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = -1$

• Interprétation graphique :

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale à droite en son point d'abscisse -1, dirigée vers le haut (d'équation $x = -1$ et $y \geqslant 1$)

2) a) Calcul de $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$:

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$

Et on a pour $x \in]-1;+\infty[$: $f'(x) = 3\times\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}-1 = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}-1$

• Le signe de $f'(x)$ où $x \in]-1;+\infty[$:

Soit x un réel de l'intervalle $]-1;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1-\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{-x(x+2)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}\times(1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4})}$$

Alors le signe de $f'(x)$ est celui de $-x(x+2)$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$

D'où le tableau de variation de f est :

For more visit: L9ray.com CamScanner

x	-1		0		
$f'(x)$	$\|\|+\infty$	$+$	0	$-$	$+\infty$
f	1	↗	3	↘	$-\infty$

b) Montrons que : $(\exists!\alpha \in]5;6[)\ ;\ f(\alpha)=0$

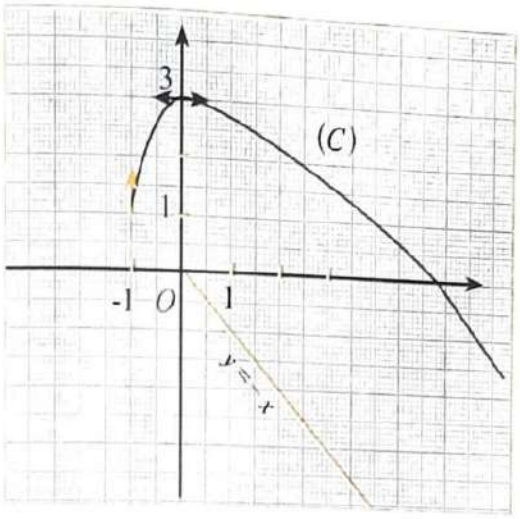
Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]5;6[$

La fonction h est continue et strictement décroissante sur $]5;6[$

Donc elle réalise une bijection de $]5;6[$ sur $h(]5;6[)=]h(6);h(5)[$

Puisque $h(6)=3\cdot\sqrt[3]{7}-6$ et $h(5)=3\cdot\sqrt[3]{6}-5$ c'est-à-dire : $h(5)>0$ et $h(6)<0$ alors $0\in]h(6);h(5)[$ donc il existe un unique réel $\alpha\in]5;6[$ tel que $h(\alpha)=0$ c'est-à-dire $f(\alpha)=0$

Par suite $(\exists!\alpha \in]5;6[)\ ;\ f(\alpha)=0$



II) 1) Montrons que : $(\exists!\lambda_0 \in]2;3[)\ ;\ g(\lambda_0)=\lambda_0$

On considère la fonction φ définie sur l'intervalle $]2;3[$ par :

$$\varphi(x)=g(x)-x$$

- La fonction φ est continue sur $]2;3[$
- La monotonie de φ sur $]2;3[$ tels que $x<y$

On a la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc $g(x)>g(y)$

Par suite $x<y \Longrightarrow g(x)>g(y)$ et $-x>-y$

$\Longrightarrow g(x)-x>g(y)-y$

$\Longrightarrow \varphi(x)>\varphi(y)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

c'est-à-dire la fonction φ est ... ement décroissante sur $]2;3[$

Par conséquent la fonction φ réalise une bijection de $]2;3[$ sur $\varphi(]2;3[) =]\varphi(3);\varphi(2)[$

Et on a : $\varphi(3) < 0$ et $\varphi(2) > 0$ c'est-à-dire : $0 \in]\varphi(3);\varphi(2)[$

Donc il existe un unique réel $\lambda_0 \in]2;3[$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$

c'est-à-dire : $g(\lambda_0) = \lambda_0$

Ainsi : $(\exists! \lambda_0 \in]2;3[)$; $g(\lambda_0) = \lambda_0$

2) a) • Montrons que g admet une fonction réciproque :

La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur l'intervalle $J = g([0;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x); g(0)\right] =]-\infty;3]$

Par conséque g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $]-\infty;3]$

b) • Montrons que la fonction g^{-1} est dérivable sur $]-\infty;3[$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$, donc la fonction g^{-1} est dérivable sur l'intervalle $g(]0;+\infty[) =]-\infty;3[$

• Montrons que : $(g^{-1})'(\lambda_0) = \dfrac{4\lambda_0^2}{9-4\lambda_0^2}$

On a la fonction g^{-1} est dérivable en λ_0, et $g(\lambda_0) = \lambda_0$ c

'est-à-dire $g^{-1}(\lambda_0) = \lambda_0$

Donc : $(g^{-1})'(\lambda_0) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(\lambda_0))} = \dfrac{1}{g'(\lambda_0)}$

Et on a : $g'(\lambda_0) = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{\lambda_0+1})^2} - 1$

Puisque : $g(\lambda_0) = \lambda_0 \iff 3\cdot\sqrt[3]{\lambda_0+1} - \lambda_0 = \lambda_0$

$\iff \sqrt[3]{\lambda_0+1} = \dfrac{2\lambda_0}{3}$

$\iff (\sqrt[3]{\lambda_0+1})^2 = \dfrac{4\lambda_0^2}{9}$

Alors $g'(\lambda_0) = \dfrac{9}{4\lambda_0^2} - 1 = \dfrac{9-4\lambda_0^2}{4\lambda_0^2}$

D'où $(g^{-1})'(\lambda_0) = \dfrac{4\lambda_0^2}{9-4\lambda_0^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

c) La courbe (Γ) voir la figure précédente

3) Montrons que : $(\forall x \in]-\infty;0[)\ ;\ g^{-1}(x)-\alpha < \frac{x\alpha^2}{9-\alpha^2}$

Soit $x \in]-\infty;0[$, on a :

La fonction g^{-1} est continue sur $[x;0]$ et est dérivable sur $]x;0[$, donc d'après le théorème des accroissements finis :

$$(\exists c \in]x;0[)\ ;\ g^{-1}(x)-g^{-1}(0)=(x-0)(g^{-1})'(c)$$

Or $g(\alpha)=0$ c'est-à-dire $g^{-1}(0)=\alpha$

Et on a : $(g^{-1})(c)=\frac{1}{g'(g^{-1}(c))}$, donc : $(\exists c \in]x;0[)$

tel que $g^{-1}(x)-\alpha=\frac{x}{g'(g^{-1}(c))}$

Puisque la fonction g^{-1} est strictement décroissante sur $]-\infty;3]$

Alors : $x<c<0 \Longrightarrow g^{-1}(0)<g^{-1}(c)<g^{-1}(x)$

$$\Longrightarrow \alpha < g^{-1}(c) < g^{-1}(x)$$

Et on a : $(\forall x \in]-1;+\infty[)\ ;\ f''(x)=-\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}}$

Donc la fonction f' est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$ par suite g' est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Il s'ensuit que : $\alpha < g^{-1}(c) \Longrightarrow g'(g^{-1}(c)) < g'(\alpha) < 0$

Et on a : $g'(\alpha)=\frac{1}{(\sqrt[3]{\alpha+1})^2}-1$

et puisque $f(\alpha)=0 \Longleftrightarrow \sqrt[3]{\alpha+1}=\frac{\alpha}{3} \Longleftrightarrow (\sqrt[3]{\alpha+1})^2=\frac{\alpha^2}{9}$

Donc $g'(\alpha)=\frac{9}{\alpha^2}-1=\frac{9-\alpha^2}{\alpha^2}$

Par suite : $g'(g^{-1}(c)) < \frac{9-\alpha^2}{\alpha^2}$ c'est-à-dire $\frac{\alpha^2}{9-\alpha^2} < \frac{1}{g'(g^{-1}(c))}$

Et comme $x<0$ alors $\frac{x}{g'(g^{-1}(c))} < \frac{x\alpha^2}{9-\alpha^2}$

D'où $g^{-1}(x)-\alpha < \frac{x\alpha^2}{9-\alpha^2}$

Ainsi : $(\forall x \in]-\infty;0[) + \cdot q \quad g^{-1}(x)-\alpha < \frac{x\alpha^2}{9-\alpha^2}$

III) 1) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leqslant u_n \leqslant 3$

En utilisant un raisonnement par récurrence

- **Initialisations :**

• Pour $n=0$ on a : $u_0=0$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$

For more visit: L9ray.com CamScanner

- **Hérédité :**

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 3$, et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

On a la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

donc : $0 \leqslant u_n \leqslant 3 \Longrightarrow f(3) \leqslant f(u_n) \leqslant f(0)$

$$\Longrightarrow 3 \cdot \sqrt[3]{4} - 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$$

et on a $3 \cdot \sqrt[3]{4} - 3 > 0$ d'où $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leqslant u_n \leqslant 3 \Longrightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

• **Conclusion** : D'après la principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

b) • Remarque :

• Soit n un entier naturel, on a :

$x_{n+1} = u_{2(n+1)} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(x_n))$

Et $y_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = f(u_{2(n+1)}) = f(u_{(2n+1)+1}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(y_n))$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_{n+1} = fof(x_n)$ et $y_{n+1} = fof(y_n)$

• La fonction f est strictement décroissante sur $[0;3]$ et que $f([0;3]) \subset [0;3]$. Donc la fonction fof est strictement croissante sur l'intervalle $[0;3]$

• Montrons par récurrence que la suite (x_n) est croissante, c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n \leqslant x_{n+1}$

• Pour $n = 0$, on a : $x_0 = u_0 = 0$ et $x_1 = u_2$

et comme $u_2 \geqslant 0$ alors $x_0 \leqslant x_1$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n \leqslant x_{n+1}$ et montrons que $x_{n+1} \leqslant x_{n+2}$

On a x_n et x_{n+1} des éléments de l'intervalle $[0;3]$ et la fonction fof croissante sur $[0;3]$ donc : $x_n \leqslant x_{n+1} \Longrightarrow fof(x_n) \leqslant fof(x_{n+1})$

$$\Longrightarrow x_{n+1} \leqslant x_{n+2}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n \leqslant x_{n+1} \Longrightarrow x_{n+1} \leqslant x_{n+2}$

• **Conclusion** : D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n \leqslant x_{n+1}$

Ainsi la suite (x_n) est croissante.

• Montrons, par récurrence, que la suite (y_n) est décroissante c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} \leqslant y_n$

• Pour $n = 0$, on a : $u_0 \leqslant u_2$ donc $f(u_2) \leqslant f(u_1)$, c'est-à-dire $u_3 \leqslant u_1$ signifie que $y_1 \leqslant y_0$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $y_{n+1} \leqslant y_n$ et montrons que $y_{n+2} \leqslant y_{n+1}$

On a y_n et y_{n+1} des éléments de $[0;3]$ et la fonction fof est croissante sur $[0;3]$, donc : $y_{n+1} \leqslant y_n \Longrightarrow fof(y_{n+1}) \leqslant fof(y_n)$

$$\Longrightarrow y_{n+2} \leqslant y_{n+1}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} \leqslant y_n \Longrightarrow y_{n+2} \leqslant y_{n+1}$

• Conclusion : D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} \leqslant y_n$

Ainsi la suite (y_n) est décroissante

2) • Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n < \lambda_0 < y_n$

En utilisant un raisonnement par récurrence

• Pour $n = 0$, on a : $x_0 = 0$, $y_0 = 3$ et $0 < 2 < \lambda_0 < 3$, donc : $x_0 < \lambda_0 < y_{n+1}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n < \lambda_0 < y_n$ et montrons que :

$$x_{n+1} < \lambda_0 < y_{n+1}$$

On a : x_n, y_n et λ_0 sont des éléments de $[0;3]$ et la fonction fof est croissante sur $[0;3]$, donc

$$x_n < \lambda_0 < y_n \Longrightarrow fof(x_n) < fof(\lambda_0) < fof(y_n)$$

$$\Longrightarrow x_{n+1} < \lambda_0 < y_{n+1} \text{ (car } fof(\lambda_0) = f(\lambda_0) = \lambda_0)$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n < \lambda_0 < y_n \Longrightarrow x_{n+1} < \lambda_0 < y_{n+1}$

• Conclusion : D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n < \lambda_0 < y_n$

• Déduction :

La suite (x_n) est croissante et majorée par λ_0, donc elle est convergente

La suite (y_n) est décroissante et minorée par λ_0, donc elle est convergente

3) a) Montrons que : $(\forall x \in [0;3])$; $|f'(x)| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2 \times \sqrt[3]{2}}\right)$

Soit $x \in [0;3]$, on a : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - 1$ et $f'(x) \leqslant 0$

Donc : $|f'(x)| = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Par suite : $|f'(x)| - \left(1 - \frac{1}{2 \times \sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{2 \times \sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{16}}{2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Puisque : $0 \leqslant x \leqslant 3 \Longrightarrow 1 \leqslant 1 + x \leqslant 4$

$$\Longrightarrow 1 \leqslant (1+x)^2 \leqslant 16$$

$$\Longrightarrow 1 \leqslant \sqrt[3]{(x+1)^2} \leqslant \sqrt[3]{16}$$

c'est-à-dire : $\sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt[3]{16} \leqslant 0$, donc $|f'(x)| - \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right) \leqslant 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

signifie que : $|f'(x)| \leqslant 1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$

Ainsi $(\forall x \in [0;3])$; $|f'(x)| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\times\sqrt[3]{2}}\right)$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^2 \times |x_n - y_n|$

On a la fonction f est dérivable sur $[0;3]$ et $f([0;3]) \subset [0;3]$

donc fof est dérivable sur $[0;3]$ et on a : $(fof)'(x) = f'(f(x)) \times f'(x)$ pour tout $x \in [0;3]$

Et comme $|f'(t)| \leqslant 1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ pour $t \in [0;3]$

Alors $|(fof)'(x)| = |f'(x)| \times |f'(f(x))| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^2$ pour tout $x \in [0;3]$

Donc : La fonction fof est dérivable sur $[0;3]$

et $(\forall x \in [0;3])$; $|(fof)'(x)| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^2$

Par suite, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $|fof(x_n) - fof(y_n)| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^2 \times |x_n - y_n|$

équivaut à : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^2 \times |x_n - y_n|$

c) Déduction :

- Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|x_n - y_n| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^{2n} |x_0 - y_0|$
- Pour $n = 0$, on a : $|x_0 - y_0| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^0 \times |x_0 - y_0|$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $|x_n - y_n| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^{2n} \times |x_0 - y_0|$ et montrons que : $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^{2(n+1)} \times |x_0 - y_0|$

On a d'après la question précédente $|y_{n+1} - x_{n+1}| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^2 \times |x_n - y_n|$

Et on a :

$|x_n - y_n| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^{2n} \times |x_0 - y_0| \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^2 \times |x_n - y_0| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{3}}\right)^{2n+2} \times |x_0 - y_0|$

Donc : $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^{2(n+1)} \times |x_0 - y_0|$

- **Conclusion :** D'après le principe de récurrence :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $|x_n - y_n| \leqslant \left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^{2n} \times |x_0 - y_0|$

• On a : $\left|\left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^{2}\right| \leqslant 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)^{2n} = 0$

Par suite $\lim\limits_{n\to 0} x_n - y_n = 0$

Et de plus la suite (x_n) est croissante et la suite (y_n) est décroissante

Par conséquent les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes

4) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lambda_0$

Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont la même limite

On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell$

Puisque : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n < \lambda_0 < y_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lambda_0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

c'est-à-dire : $\ell \leqslant \lambda_0 \leqslant \ell$ donc $\lambda_0 = \ell$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lambda_0$

Exercice 38

A) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\cos(Arc\tan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

La fonction $t \longmapsto \tan t$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ donc : $\left(\exists!\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $\tan(\alpha) = x$

c'est-à-dire : $\alpha = Arc\tan(x)$

On a : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = |\cos\alpha|$

Puisque $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\alpha > 0$, c'est-à-dire $|\cos\alpha| = \cos\alpha$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos\alpha = \cos(Arc\tan(x))$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\cos(Arc\tan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

B) 1) Montrons que la fonction f est continue sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$

On a : la fonction $u : x \longmapsto \frac{2}{3}x$ est continue sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$ et la fonction tan est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ telles que $u\left(\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\right) = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc la fonction $v : x \longmapsto \frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)$ est continue sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$

En plus on a : $v\left(\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\right) \subset \mathbb{R}$ et la fonction $Arc\tan$ est continue sur $\mathbb{R}$; donc la fonction $f = 2Arc\tan ov$ est continue sur l'intervalle $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$

• Étude de la continuité de f à gauche en $\frac{3\pi}{4}$

Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} 2Arc\tan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)$

On pose : $X = \frac{2x}{3}$, alors $x \longrightarrow \frac{3\pi}{4}^- \Longleftrightarrow x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right) = \lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{2}\tan X = +\infty$

Et comme $\lim\limits_{t\to+\infty} Arc\tan(t) = \frac{\pi}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} Arc\tan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$

Par suite $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\left(2Arc\tan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)\right) = \pi$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

signifie que la fonction f est continue à gauche en $\frac{3\pi}{4}$

Finalement la fonction f est continue sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$

2) • Montrons que f est dérivable sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$

On a la fonction $v : x \longmapsto \frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)$ est dérivable sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$ et la fonction $Arc\tan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que $v\left(\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\right) \subset \mathbb{R}$

Donc la fonction $f = 2Arc\tan ov$ est dérivable sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$

• Calculons $f'(x)$ pour tout x de $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$

Soit x un élément de $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$, on pose : $v(x) = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)$

On a : $v'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\left(1+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(1+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)\right)$

Et comme $f = 2Arc\tan ov$ alors :

$$f'(x) = 2\times\frac{v'(x)}{1+(v(x))^2} = \frac{2}{3}\times\frac{1+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{1+\frac{1}{4}\times\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)} = \frac{8}{3}\times\frac{1+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{4+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Ainsi : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\right)\ ;\ f'(x)=\frac{8}{3}\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{4+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}\right)$

3) Montrons que : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\right)\ ;\ f'(x)=\frac{5}{3}-\cos(f(x))$

Soit $x \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$, on a :

$$\cos(f(x))=\cos\left(2Arc\tan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)\right)=2\cos^2\left(Arc\tan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)\right)-1$$

D'après le résultat de la partie A) on aura :

$$\cos^2\left(Arc\tan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{4}\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}=\frac{4}{4+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}$$

Il s'ensuit que $\cos(f(x))=\frac{8}{4+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}-1=\frac{4-\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{4+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}$

Donc : $\frac{5}{3}-\cos(f(x))=\frac{5}{3}-\frac{4-\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{4+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}$

$$=\frac{20+5\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)-12+3\tan^3\left(\frac{2x}{3}\right)}{3\left(4+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)\right)}$$

$$=\frac{8}{3}\times\frac{1+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}{4+\tan^2\left(\frac{2x}{3}\right)}=f'(x)$$

Ainsi : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\right)\ ;\ f'(x)=\frac{5}{3}-\cos(f(x))$

4) 2) Montrons que : $\left(\exists c \in \left]x;\frac{3\pi}{4}\right[\right)\ /\ f(x)-\pi=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)f'(c)$

Soit $x \in \left]0;\frac{3\pi}{4}\right[$; on a $\left[x;\frac{3\pi}{4}\right] \subset \left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$, alors la fonction f est continue sur $\left[x;\frac{3\pi}{4}\right]$ et dérivable sur $\left]x;\frac{3\pi}{4}\right[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, on a : $\left(\exists c \in \left]x;\frac{3\pi}{4}\right[\right)\ /\ f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)f'(c)$

c'est-à-dire : $\left(\exists c \in \left]x;\frac{3\pi}{4}\right[\right)\ /\ f(x)-\pi=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)f'(c)$

b) Déduction :

On a : $f'(x)>0$ pour tout $x \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$ et la fonction f est continue à gau-

For more visit: L9ray.com CamScanner

che en $\frac{3\pi}{4}$, donc f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$

Comme la fonction cos est strictement décroissement sur $[0;\pi]$

alors on a : $\frac{3\pi}{4} \Longrightarrow 0 < f(x) < f(c) < \pi$

$\Longrightarrow \cos\pi < \cos(f(c)) < \cos(f(x))$

$\Longrightarrow -1 < \cos(f(c)) < \cos(f(x))$

Donc : $-\cos(f(x)) < -\cos(f(c)) < 1$

c'est-à-dire : $\frac{5}{3} - \cos(f(x)) < \frac{5}{3} - \cos(f(c)) < \frac{8}{3}$

D'après la question précédente, on a : $f'(c) = \frac{f(x)-\pi}{x-\frac{3\pi}{4}}$

D'où : $\frac{5}{3} - \cos(f(x)) < \frac{f(x)-\pi}{x-\frac{3\pi}{4}} < \frac{8}{3}$

c) • Calcul de $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} \cos(f(x))$

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \pi$ et la fonction cos est continue en π

donc $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} \cos(f(x)) = \cos(\pi) = -1$

• Déduction :

On a : $\begin{cases} \left(\forall x \in \left]0;\frac{3\pi}{4}\right[\right) \ ; \ \frac{5}{8} - \cos(f(x)) < \frac{f(x)-\pi}{x-\frac{3\pi}{4}} < \frac{8}{3} \\ \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} \frac{5}{8} - \cos(f(x)) = \frac{8}{3} \end{cases}$

Donc, d'après les propriétés de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} \frac{f(x)-\pi}{x-\frac{3\pi}{4}} = \frac{8}{3}$

Et on a : $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \pi$, par conséqent : $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} \frac{f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{x-\frac{3\pi}{4}} = \frac{8}{3}$

c'est-à-dire f est dérivable à gauche en $\frac{3\pi}{4}$ et que $f'_g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{8}{3}$

• Interprétation graphique :

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente en son point d'abscisse $\frac{3\pi}{4}$

d'équation : $\begin{cases} y = \frac{8}{3}x - \pi \\ x \leqslant \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

5) a) Tableau variations de f :

x	0		$\frac{3\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	π

b) Étude de la concavité de $(\mathscr{C})$

On a : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\right)$; $f'(x) = \frac{5}{3} - \cos(f(x))$

Comme la fonction f est dérivable sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$, $f\left(\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\right) = [0;\pi[$ et la fonction cos est dérivable sur $[0;\pi[$ donc f' est dérivable sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$, et on a : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\right)$; $f''(x) = f'(x) \times \sin(f(x))$

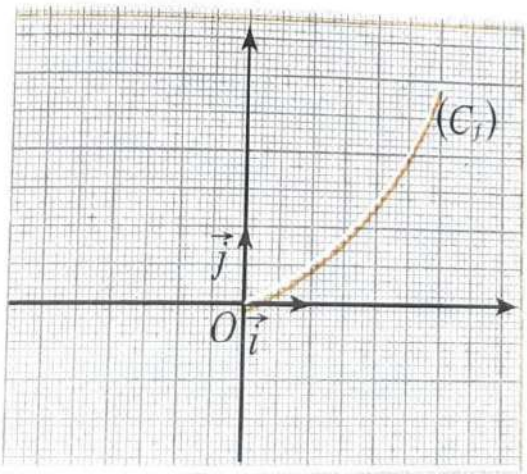
Soit $x \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$, on a : $0 \leqslant f(x) < \pi$ donc $\sin(f(x)) \geqslant 0$

Comme $f'(x) > 0$ alors $f'(x) \times \sin(f(x)) \geqslant 0$

Donc $\left(\forall x \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\right)$; $f''(x) \geqslant 0$

Ainsi la courbe $(\mathscr{C})$ est convexe sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$

c) Courbe $(\mathscr{C})$:



6) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1}

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$, donc elle réalise une bijection de $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$ sur l'intervalle $J = f\left(\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]\right)$ où $J = \left[f(0);f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = [0;\pi]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0;\pi]$

b) Calculons $f^{-1}(x)$ où $x \in [0;\pi]$

Soit $x \in [0;\pi[$ et $y \in \left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$ tels que $f^{-1}(x) = y$, on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\iff x = f(y) \\ &\iff x = 2Arc\tan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2y}{3}\right)\right) \\ &\iff \frac{x}{2} = Arc\tan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2y}{3}\right)\right) \\ &\iff 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{2y}{3}\right) \\ &\iff Arc\tan\left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{2y}{3} \\ &\iff y = \frac{3}{2}Arc\tan\left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Et comme $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \pi$ alors $f^{-1}(\pi) = \frac{3\pi}{4}$

Donc : $\begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{3}{2}Arc\tan\left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \ si \ x \in [0;\pi[\\ f^{-1}(\pi) = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

Exercice 39

1) Étudions la parité de la fonction f :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -f(x)$, en tant que la fonction $x \longmapsto Arc\tan(x)$ est impaire.

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(-x) = -f(x)$

Signifie que f est une fonction impaire.

2) Montrons que f est continue en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan X = \frac{\pi}{2}$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Et comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -f(-x) = \lim\limits_{t\to 0^+} -f(t) = 0$, en posant : $x = -t$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Ainsi la fonction f est continue en 0.

3) • Étudions la dérivabilité de la fonction f en 0 :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} x Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ signifie que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

• Interprétation géométrique :

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 0.

4) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

Soit $]0;+\infty[$, on a : $f(x) = x \times \dfrac{Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$

On pose : $t = \dfrac{1}{x}$ donc : $x \longmapsto +\infty \Longleftrightarrow t \longmapsto 0^+$

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t} \times \dfrac{Arc\tan t}{t} = +\infty$

car : $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{Arc\tan t}{t} = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

5) a) Montrons que : $(\forall x > 0)$; $\dfrac{x}{1+x^2} < Arc\tan(x) < x$:

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a :

La fonction $Arc\tan$ est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$ donc; d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$(\exists c \in]0;x[)$; $Arc\tan(x) - Arc\tan(0) = (x-0)(Arc\tan)'(c)$

Or $(\forall t \in \mathbb{R})$; $(Arc\tan)'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

Donc : $(\exists c \in]0;x[)$; $Arc\tan(x) = \dfrac{x}{1+c^2}$

Et comme : $0 < c < x \Longrightarrow 1 < 1+c^2 < 1+x^2$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$$

Par suite : $\dfrac{x}{1+x^2} < \dfrac{x}{1+c^2} < x$; car $x > 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ \frac{x}{1+x^2} < Arc\tan(x) < x$

b) Déduction :

Soit $x \in]0;+\infty[$, d'après la question précédente, on a :

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} < Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

équivaut à : $\frac{x}{1+x^2} < Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

Donc : $\frac{x^3}{1+x^2} < x^2 \cdot Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) < x$

Ainsi : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ \frac{x^3}{1+x^2} < f(x) < x$

c) Montrons que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $\frac{x^3}{1+x} < f(x) < x$

Par suite : $\frac{x^3}{1+x^2} - x < f(x) - x < 0$, c'est-à-dire : $\frac{-x}{1+x^2} < f(x) - x < 0$

Et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$

Alors, d'après les propriétés des limites et ordre : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$ signifie que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

6) a) Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ f'(x) = 2xArc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$:

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 2xArc\tan\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 2xArc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$$

Ainsi : $(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) = 2xArc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$

b) Montrons que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$:

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = 2xArc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$

$$= \frac{1}{x}\left(x^2 Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^3}{1+x^2}\right) + xArc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(f(x) - \frac{x^3}{1+x^2}\right) + xArc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

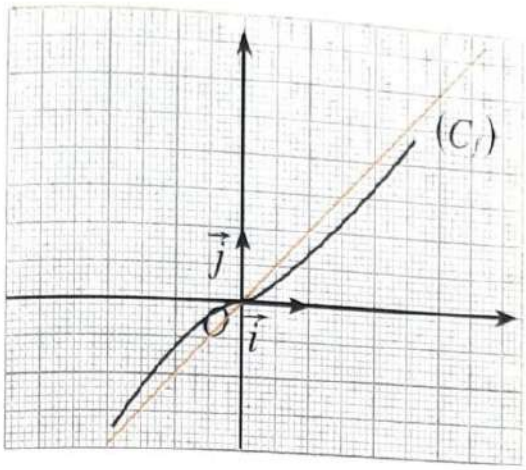
comme $\frac{x^3}{1+x^2} < f(x)$, d'après la déduction, et $x\,Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

alors : $\frac{1}{x} - \left(f(x) - \frac{x^3}{1+x^2}\right) + x\,Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ C'est-à-dire : $f'(x) > 0$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ f'(x) > 0$

Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

7) La courbe $(\mathcal{C}_f)$:



8) a) Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$:

La fonction $u \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, donc la fonction $Arc\tan ou$ est continue sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Donc la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de deux fonctions continues qui sont $Arc\tan ou$ et $x \longmapsto x^2$.

Et comme f est continue en 0 alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

En plus la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par suite elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$

b) Montrons que f^{-1} est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et calculons $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

La fonction f est dérivable en 1 et $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{\pi-1}$

9) a) Montrons que $(\exists! a_n \in]0;+\infty[)\ ;\ f(a_n) = \frac{1}{x}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*$:

La fonction f réalise une bijection de l'intervalle $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$.

Puisque $\frac{1}{n} \in]0;+\infty[$, alors l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une et une seule

For more visit: L9ray.com CamScanner

solution a_n dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! a_n \in]0;+\infty[)\ ;\ f(a_n) = \frac{1}{n}$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ ;\ a_n < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on a : $f(1) = \frac{\pi}{4}$

comme $n \geq 2$; c'est-à-dire : $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$ alors $\frac{1}{n} < \frac{\pi}{4}$,

donc : $f(a_n) < f(1)$

Par suite : $f(a_n) < f(1) \Longrightarrow a_n < 1$; car f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Ainsi : $(\forall n \geq 2)\ ;\ a_n < 1$

c) Montrons que la suite (a_n) est décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f(a_n) = \frac{1}{n}$ et $f(a_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$

Or $n+1 > n \Longrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, il s'ensuit que : $f(a_{n+1}) < f(a_n)$

Comme la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Alors : $a_{n+1} \leq a_n$

Conclusion : La suite (a_n) est décroissante.

d) Montrons que (a_n) est convergente et déterminons sa limite:

La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0, alors elle est convergente.

On pose : $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ où $\ell \in \mathbb{R}$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 0 < a_n < 1$ alors : $\ell \in [0;1]$

comme $a_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ alors : $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = f^{-1}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\right) = f^{-1}(0) = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

Exercice 40

1) a) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} :

- La fonction $u : x \longrightarrow 1 - \sin x$ est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc la fonction $f = 2\left(\frac{1}{u} - 1\right)$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.
- La fonction f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et que :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\ ;\ f'(x) = 2\left(\frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}\right)$

Il s'ensuit que : $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

comme la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors elle est bijective de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[f(0); \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\right[= [0;+\infty[$

Par conséquent f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0;+\infty[$.

b) Déterminons $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(2)$:

• comme $f(0) = 0$ alors : $f^{-1}(0) = 0$

• Soit $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $f^{-1}(2) = \alpha$, on a : $f^{-1}(2) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\sin\alpha} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Donc : $f^{-1}(2) = \frac{\pi}{6}$

2) a) • Montrons que : $(\forall x \in [0;+\infty[\ ;\ 1-\sin(f^{-1}(x)) = \frac{2}{2+x}$

Soit $x \in [0;+\infty[$, on a : $f^{-1}(x) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc :

$$f(f^{-1}(x)) = 2\left(\frac{1}{1-\sin(f^{-1}(x))} - 1\right) \Leftrightarrow x = \frac{2}{1-\sin(f^{-1}(x))} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-\sin(f^{-1}(x))} = x+2$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin(f^{-1}(x)) = \frac{2}{x+2}$$

Donc : $(\forall x \in [0;+\infty[\ ;\ 1-\sin(f^{-1}(x)) = \frac{2}{x+2}$

• Montrons que $(\forall x \in [0;+\infty[\ ;\ \cos(f^{-1}(x)) = \frac{2\sqrt{1+x}}{2+x}$:

Soit $x \in [0;+\infty[$, on a : $\cos^2(f^{-1}(x)) = 1-\sin^2(f^{-1}(x))$

C'est-à-dire : $\cos(f^{-1}(x)) = \sqrt{1-\sin^2(f^{-1}(x))}$, car $f^{-1}(x) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Or $1-\sin^2(f^{-1}(x)) = (1-\sin(f^{-1}(x)))(1+\sin(f^{-1}(x)))$

$$= \left(\frac{2}{2+x}\right)\left(1+1-\frac{2}{2+x}\right) = \frac{4(1+x)}{(2+x)^2}$$

Donc : $\cos(f^{-1}(x)) = \frac{2\sqrt{1+x}}{2+x}$

Ainsi : $(\forall x \in [0;+\infty[\ ;\ \cos(f^{-1}(x)) = \frac{2\sqrt{1+x}}{x+2}$

b) Montrons que la fonction f^{-1} est dérivable sur $[0;+\infty[$:

La fonction f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ telle que : $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) = [0;+\infty[$

c) Montrons que $(\forall x \in [0;+\infty[\ ;\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$:

On a : $(\forall x \in [0;+\infty[\ ;\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Soit $x \in [0;+\infty[$, on a :

$$f'(f^{-1}(x)) = \frac{2\cos(f^{-1}(x))}{(1-\sin(f^{-1}(x)))^2} = \frac{4\sqrt{1+x}}{2+x} \times \left(\frac{2+x}{2}\right)^2 = (2+x)\sqrt{1+x}$$

Donc : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

Ainsi : $(\forall x \in [0;+\infty[\ ;\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

d) Montrons que $(\forall x \in [0;+\infty[\ ;\ 0 < (f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{2}$:

Soit $x \in [0;+\infty[$, on a :

$$(f^{-1})'(x) > 0 \text{ et } 0 \leq x \Longrightarrow 2 \leq x+2 \text{ et } \sqrt{x+1} \geq 1$$

$$\Longrightarrow (x+2)\sqrt{1+x} \geq 2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2}$$

C'est-à-dire : $(f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{2}$, donc : $0 < (f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{2}$

Ainsi : $(\forall x \in [0;+\infty[\ ;\ 0 < (f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{2}$

3) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n \leq 2$

- Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$ donc : $0 \leq u_0 \leq 2$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq 2$ et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

La fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ alors la fonction réciproque f^{-1} est aussi strictement croissante sur $[0;+\infty[$, par suite on

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$0 \le u_n \le 0 \Rightarrow f^{-1}(0) \le f^{-1}(u_n) \le f^{-1}(2)$$
$$\Rightarrow 0 \le u_{n+1} \le \frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow 0 \le u_{n+1} \le 2$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \le u_n \le 2 \Rightarrow 0 \le u_{n+1} \le 2$

• **Conclusion :** d'après le principe de la récurrence on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 0 \le u_n \le 2$$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 0 < u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_n$

La fonction f^{-1} est continue sur $[0;2]$ et dérivable sur $]0;2[$ telle que :

$(\forall x \in]0;2[) \; ; \; 0 < f'(x) \le \frac{1}{2}$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis : (TAF) on a :

$(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 0(u_n - 0) < f^{-1}(u_n) - f^{-1}(0) \le \frac{1}{2}(u_n - 0)$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 0 < u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_n$

c) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 0 < u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$:

• Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ donc : $0 < u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{0-1}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $0 < u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et montrons que :

$0 < u_{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

On a d'après la question précédente : $0 < u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_n$

et comme : $0 < u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ alors : $u_{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

Donc : $0 < u_{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 0 < u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

d) Déduction :

On a: $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

Et comme : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 0 < u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

On conclut, d'après les critères de convergence, que la suite (u_n) est convergente et de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

4) a) Montrons que :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*);\left(\exists c_n \in \left]u_n+\frac{1}{n}\ ;\ u_n+\frac{2}{n}\right[\right)\ ;\ v_n=\frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$$

Soit n un entier naturel non nul, on a : $0 \le u_n+\frac{1}{n} < u_n+\frac{2}{n} \le 2$

C'est-à-dire : $\left[u_n+\frac{1}{n}\ ;u_n+\frac{2}{n}\right] \subset [1;2]$

La fonction f^{-1} est continue sur $\left[u_n+\frac{1}{n}\ ;u_n+\frac{2}{n}\right]$ et dérivable sur $\left]u_n+\frac{1}{n}\ ;u_n+\frac{2}{n}\right[$

donc, d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$\left(\exists c_n \in \left]u_n+\frac{1}{n};u_n+\frac{2}{n}\right[\right)\ ;\ f^{-1}\left(u_n+\frac{2}{n}\right)-f^{-1}\left(u_n+\frac{1}{n}\right)=\left(u_n+\frac{2}{n}-u_n-\frac{1}{n}\right)(f^{-1})'(c_n)$$

C'est-à-dire : $\left(\exists c_n \in \left]u_n+\frac{1}{n}\ ;u_n+\frac{2}{n}\right[\right)\ ;\ \left(\frac{v_n}{n}=\frac{1}{n}(f^{-1})'(c_n)\right)$

Or $(f^{-1})'(c_n)=\frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\left(\exists c_n \in \left]u_n+\frac{1}{n};u_n+\frac{2}{n}\right[\right),\ v_n=\frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$

b) • Montrons $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=0$ et calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n+\frac{1}{n} < c_n < u_n+\frac{2}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+\frac{1}{n}=0\ ;\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n+\frac{2}{n}=0$;

d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=0$ puis que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{1}{2}$

Exercice 41

1) a) Montrons que la fonction f est continue sur $]-\infty;1]$:

• La fonction $u: x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $]-\infty;1[$ donc la fonction $x \mapsto Arc\tan(u(x))$ est continue sur $]-\infty;1[$, et on a : $u(x) \neq 0$ pour tout x de $]-\infty;1[$. Il s'ensuit que la fonction $f=\frac{Arc\tan ou}{u}$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

• Soit $x \in]-\infty;1[$, on pose $t=\sqrt{1-t}$ donc : $x \to 1^- \iff t \to 0^+$

Par suite : $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{Arc\tan(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{t\to0^+} \frac{Arc\tan t}{t}=1$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$ signifie que f est continue à gauche en 1.

Finalement la fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty;1]$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) • Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

On a : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} Arc\tan X=\frac{\pi}{2}$,

donc : $\lim_{x\to-\infty} Arc\tan\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2}$

Par suite : $\lim_{x\to-\infty}\frac{Arc\tan(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}}=0$; c'est-à-dire : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

• Interprétation graphique :

On a : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.

2) a) • Montrons que la fonction φ_a est continue sur $[a;1]$:

Les fonctions $u: x\mapsto\sqrt{1-x}$ est continue sur $[a;1]$, car $[a;1]$ est inclus dans $]-\infty;1]$, donc la fonction $x\mapsto Arc\tan(u(x))$ est continue sur $[a;1]$.

Par conséquent la fonction :

$\varphi_a: x\longmapsto(Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a})\times u^3-(Arc\tan ou-u)\times(\sqrt{1-a})^3$ est continue sur l'intervalle $[a;1]$.

• Montrons que la fonction φ_a est dérivable sur $]a;1[$.

la fonction $u: x\mapsto\sqrt{1-x}$ est dérivable sur $]-\infty;1[$ en particulier sur l'intervalle $]a;1[$.

Par conséquent la fonction :

$\varphi_a: x\longmapsto(Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a})\times u^3-(Arc\tan ou-u)\times(\sqrt{1-a})^3$

est dérivable sur l'intervalle $]a;1[$

b) • Calculons $\varphi_a(1)$ et $\varphi_a(a)$:

On a :

$\varphi_a(1)=(Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a})\times 0-(Arc\tan(0)-0)\times(\sqrt{1-a})^3=0$

Et

$\varphi_a(a)=(Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a})\times(\sqrt{1-a})^3-(Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a})\times(\sqrt{1-a})^3=0$

C'est-à-dire : $\varphi_a(1)=\varphi_a(a)=0$

• Montrons que : $(\exists c\in]a;1[)$; $\frac{Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a}}{(\sqrt{1-a})^3}=\frac{1}{3(c-2)}$

La fonction φ_a est continue sur $[a;1]$, dérivable sur $]a;1[$ et telle que $\varphi_a(1)=\varphi_a(a)=0$, d'après le théorème de Rolle on a :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$(\exists c \in]a;1[)\,;\varphi'(c)=0$

Or : pour tout réel x de $]a;1[$, on a :

$$\varphi_a'(x)=\frac{-3(\sqrt{1-x})^2}{2\sqrt{1-x}}(Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a})-\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}(1+(\sqrt{1-x})^2)}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)\times(\sqrt{1-a})^3$$
$$=-\frac{3}{2}\sqrt{1-x}\times(Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a})-\left(\frac{-1}{2(2-x)\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)\times(\sqrt{1-a})^3$$
$$=-\frac{3}{2}\sqrt{1-x}\times(Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a})-\left(\frac{\sqrt{1-x}}{2(2-x)}\right)\times(\sqrt{1-a})^3$$

Donc:

$$\varphi_a(c)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}\sqrt{1-c}(Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a})=\frac{\sqrt{1-c}}{2(c-2)}\times(\sqrt{1-a})^3$$
$$\Leftrightarrow\frac{Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a}}{(\sqrt{1-a})^3}=\frac{1}{3(c-2)}$$

Ainsi : $(\exists c \in]a;1[)\,;\dfrac{Arc\tan(\sqrt{1-a})-\sqrt{1-a}}{(\sqrt{1-a})^3}=\dfrac{1}{3(c-2)}$

c) Déduction :

Soit $x \in]-\infty;1[$, on a : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{Arc\tan(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}}-1\right)$

$$=\frac{1}{x-1}\left(\frac{Arc\tan(\sqrt{1-x})-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\right)$$
$$=-\left(\frac{Arc\tan(\sqrt{1-x})-\sqrt{1-x}}{(\sqrt{1-x})^3}\right)$$

D'après la question précédente on a :

$$(\exists c \in]x;1[)\,;\frac{Arc\tan(\sqrt{1-x})-\sqrt{1-x}}{(\sqrt{1-x})^3}=\frac{1}{3(c-2)}$$

C'est-à-dire : $(\exists c \in]x;1[)\,;\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1}{3(c-2)}$

Puisque : $x<c<1\Leftrightarrow x-2<c-2<-1$

$$\Leftrightarrow 3(x-2)<3(c-2)<-3$$
$$\Leftrightarrow-\frac{1}{3}<\frac{1}{3(c-2)}<\frac{1}{3(x-2)}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{3(2-x)}<\frac{-1}{3(c-2)}<\frac{1}{3}$$

Alors : $\dfrac{1}{3(2-x)}<\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<\dfrac{1}{3}$

Ainsi : $(\forall x \in]-\infty;1[)\,;\dfrac{1}{3(2-x)}<\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<\dfrac{1}{3}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

d) Montrons la fonction f est dérivable à gauche en 1:

On a : $(\forall x < 1); \frac{1}{3(2-x)} < \frac{f(x)-f(1)}{x-1} < \frac{1}{3}$. Et $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{3(2-x)} = \frac{1}{3}$

Donc, d'après le théorème de la limite par encadrement :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{3}$$

D'où la fonction f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = \frac{1}{3}$

• **Interprétation géométrique :**

La courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche en son point d'abscisse 1 dont une équation est : $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ x \leq 1 \end{cases}$

3) a) Montrons que f est dérivable sur $]-\infty;1]$:

On a la fonction $u: x \mapsto \sqrt{1-x}$ est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $\sqrt{1-x} \neq 0$ pour tout $x \in]-\infty;1[$, donc la fonction $f = Arc\tan ou$ est dérivable sur $]-\infty;1[$.

et comme f est dérivable à gauche en 1,

on conclut donc que la fonction f est dérivable sur $]-\infty;1]$.

• Montrons que : $(\forall x < 1); f'(x) = \frac{1}{2(1-x)}\left(f(x) - \frac{1}{2-x}\right)$

Soit un élément de $]-\infty;1[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}u(x) - Arc\tan(u(x))u'(x)}{(u(x))^2}$$

$$= \frac{1}{1-x}\left(\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{2-x} \times \sqrt{1-x} - Arc\tan(\sqrt{1-x}) \times \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1-x}\left(\frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2(2-x)}\right)$$

$$= \frac{1}{2(1-x)}\left(f(x) - \frac{1}{2-x}\right)$$

D'où : $(\forall x \in]-\infty;1[); f'(x) = \frac{1}{2(1-x)}\left(f(x) - \frac{1}{2-x}\right)$

b) Montrons que $(\forall x > 0); \frac{x}{1+x^2} < Arc\tan x < x$:

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : la fonction $Arc\tan$ est continue sur $[0;x]$ et est dérivable sur $]0;x[$, donc d'après TAF

For more visit: L9ray.com CamScanner

$(\exists c \in]0;x[)\ ; Arc\tan(x) - Arc\tan(0) = (x-0)(Arc\tan)'(c)$

C'est-à-dire : $(\exists c \in]0;x[)\ ; Arc\tan(x) = \dfrac{x}{1+c^2}$

Or $0 < c < x \Rightarrow 1 < 1+c^2 < 1+x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$$

Alors : $\dfrac{x}{1+x^2} < \dfrac{x}{1+c^2} < x$

Donc : $\dfrac{x}{1+x^2} < Arc\tan x < x$

Ainsi : $(\forall x > 0)\ ; \dfrac{x}{1+x^2} < Arc\tan x < x$

c) Déduction :

• Déterminons le signe de $f'(x)$ où $x < 1$:

Soit $x \in]-\infty;1[$; on a : $\sqrt{1-x} \in]0;+\infty[$

donc : $\dfrac{\sqrt{1-x}}{2-x} < Arc\tan(\sqrt{1-x}) < \sqrt{1-x}$

d'après la double inégalité précédente

Donc : $\dfrac{1}{2-x} < \dfrac{Arc\tan(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} < 1$

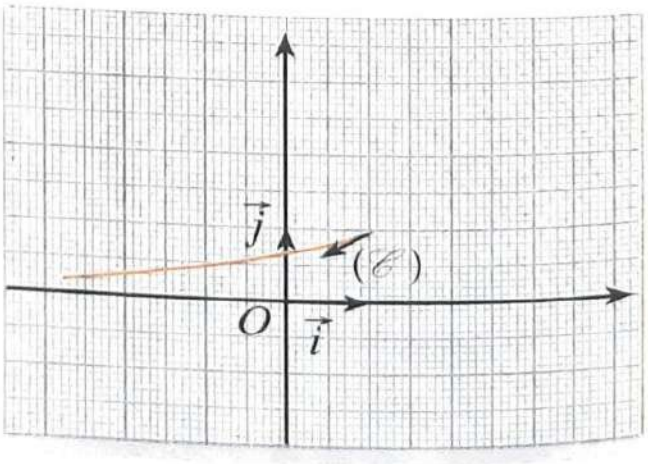
Il en résulte que : $\dfrac{1}{2-x} < f(x)$ c'est-à-dire : $f(x) - \dfrac{1}{2-x} > 0$

Par suite : $\dfrac{1}{2(1-x)}\left(f(x) - \dfrac{1}{2-x}\right) > 0$

C'est-à-dire : $f'(x) > 0$ pour tout $x < 1$

On conclut donc que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;1]$.

d) La courbe $(\mathscr{C})$:



For more visit: L9ray.com
CamScanner

4) a) Montrons que : $(\forall x \in]-\infty;1[) ; f'(x) < \frac{1}{2(2-x)}$

Soit $x \in]-\infty;1[$; on a : $f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2-x} < 1 - \frac{1}{2-x}$

$\Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2-x} < \frac{1-x}{2-x}$

comme $1-x > 0$ alors : $\frac{1}{2(1-x)}\left(f(x) - \frac{1}{2-x}\right) < \frac{1}{2(2-x)}$

C'est-à-dire : $f'(x) < \frac{1}{2(2-x)}$

Ainsi : $(\forall x < 1) ; f'(x) < \frac{1}{2(2-x)}$

b) Déduction :

Soit $x \in]-\infty;1[$; on a : $f'(x) > 0$

donc : $|f'(x)| - \frac{1}{2} = f'(x) - \frac{1}{2}$

Or $f'(x) < \frac{1}{2(2-x)} \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{2} < \frac{1}{2(2-x)} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{2(2-x)}$

Comme $\frac{x-1}{2(2-x)} < 0$ alors : $f'(x) - \frac{1}{2} < 0$

Donc : $|f'(x)| < \frac{1}{2}$

Ainsi : $(\forall x \in]-\infty;1]) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) Montrons que $(\forall (x;y) \in]-\infty;1]) ; |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$:

La fonction f est dérivable sur $]-\infty;1]$

et que $(\forall x \in]-\infty;1]) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Il résulte de l'inégalité des accroissements finis que :

$(\forall (x;y) \in (]-\infty;1])^2 \ ; \ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

3 Leçon Les suites numérique

Maxi

Résumé

Soit n_0 un entier naturel et $I \subset \mathbb{N}$ avec $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geqslant n_0\}$

I Suite majorée ; suite minorée ; suite bornée.

Définitions:

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique définie sur I

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée si et seulement s'il existe un réel M tel que:

$(\forall n \in I)$; $u_n \leq M$

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée si et seulement s'il existe un réel m tel que:

$(\forall n \in I)$; $u_n \geqslant m$

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

II Sens de variations d'une suite

Propriétés:

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite définie sur I

- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite croissante si et seulement si: $(\forall n \in I)$; $u_{n+1} \geqslant u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite strictement croissante si et seulement si:

$(\forall n \in I)$; $u_{n+1} > u_n$

- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite décroissante si et seulement si: $(\forall n \in I)$; $u_{n+1} \leq u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite strictement décroissante si et seulement si,

$(\forall n \in I)$; $u_{n+1} < u_n$

- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite constante si et seulement si: $(\forall n \in I)$; $u_{n+1} = u_n$

Remarque:

- Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
- Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

For more visit: L9ray.com CamScanner

III Suites arithmétiques - suites géométriques

Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
$(\forall n \in I)\ ;\ u_{n+1} = u_n + r$	$(\forall n \in I)\ ;\ u_{n+1} = qu_n$
$u_n = u_0 + nr$; cas où: $I = \mathbb{N}$	$u_n = q^n u_0$; cas où: $I = \mathbb{N}$ et $q \neq 0$
$u_n = u_p + (n-p)r$; n et p de I	$u_n = q^{n-p} u_p$; n et p de I et $q \neq 0$
Somme des termes consécutifs	Somme des termes consécutifs
• $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$	• $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$
• $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \left(\frac{n-p+1}{2}\right)(u_p + u_n)$	• $u_p + u_{p+1} + \ldots u_n = u_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$
• $S_n = \begin{pmatrix}\text{nombre de}\\ \text{termes}\end{pmatrix} \times \left(\frac{1^{er}\ \text{terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)$	• $S_n = \begin{pmatrix}1^{er}\ \text{terme de}\\ \text{la somme}\end{pmatrix} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$
• Cas particulier:	avec $q \neq 1$
$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	• Cas particulier:
	$1 + q + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ où $q \neq 1$

Exercices d'application

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in IN);\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$ $a_n = u_n - \frac{1}{2}$

1) Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit (v_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} v_0 = \frac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ v_{n+1} = -\frac{4v_n + 1}{4v_n} \end{cases}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n \neq -\frac{1}{2}$.

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $b_n = \frac{2}{2v_n + 1}$

a) Montrer que (b_n) est une suite arithmétique, dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 \leq u_n < 1$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique, puis exprimer v_n en fonction de n

b) En déduire u_n en fonction de n

Exercice 4

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par:

$u_1 = 1$; $v_1 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} = 2v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$

1) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose: $d_n = u_n - v_n$

Calculer d_{n+1} en fonction de d_n, en déduire d_n en fonction de n

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$

3) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $x_n = u_{n+1} + u_n$ et $y_n = u_{n+1} - 2u_n$

a) Montrer que (x_n) et (y_n) sont deux suites géométriques, puis exprimer x_n et y_n en fonction de n

b) Exprimer v_n en fonction de n

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 5

Soit (u_n) la suite numérique définie par son premier terme u_1 et par la relation de récurrence suivante: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $(n+2)u_{n+1} = nu_n + 1 - n$ (E)

1) a) Calculer u_2 et u_3 en fonction de u_1

b) On pose $\alpha_n = an + b$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ où a et b sont deux réels.

Déterminer a et b sachant que la suite $(\alpha_n)_n$ vérifie la relation (E).

2) Soit (x_n) la suite numérique définie par: $x_n = u_n - \alpha_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, avec $u_1 = 1$ avec (α_n) vérifiant (α_n)

a) Montrer que $x_{n+1} = \frac{n}{n+2}x_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

b) Exprimer x_n puis u_n en fonction de n

c) Calculer les sommes: $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de n .

Solutions

Exercice 1

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a: $a_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}$

$$= 3u_n - 1 - \frac{1}{2}$$

$$= 3u_n - \frac{3}{2}$$

$$= 3\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = 3a_n$$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_{n+1} = 3a_n$

Par conséquent (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $a_0 = \frac{1}{2}$

2) Exprimons u_n en fonction de n:

On a: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n = a_0 q^n = \frac{1}{2}3^n$ (car (a_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $\frac{1}{2}$)

par suite: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = a_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^n + 1)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 2

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n \neq -\frac{1}{2}$

• Initialisation: pour $n = 0$; on a: $v_0 = \frac{1}{2}$ donc: $v_0 \neq -\frac{1}{2}$

• Hérédité: Soit n un élément de n

Supposons que: $v_n \neq -\frac{1}{2}$ et montrons que $v_{n+1} \neq -\frac{1}{2}$

On a: $v_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{-4v_n - 1}{4v_n} + \frac{1}{2}$

$$= \frac{-4v_n - 1 + 2v_n}{4v_n}$$

c'est à dire: $v_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{-2v_n - 1}{4v_n} = \frac{-(2v_n + 1)}{4v_n}$

et puisque $v_n \neq -\frac{1}{2}$ (d'après l'hypothèse de récurrence) , alors $v_n + \frac{1}{2} \neq 0$

c'est à dire $2v_n + 1 \neq 0$ donc $v_{n+1} + \frac{1}{2} \neq 0$, d'où $v_{n+1} \neq -\frac{1}{2}$

Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n \neq -\frac{1}{2}$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a: $b_{n+1} - b_n = \frac{2}{2v_{n+1} + 1} - \frac{2}{2v_n + 1}$

$$= 2\left(\frac{2v_n}{-(2v_n + 1)} - \frac{1}{2v_n + 1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{-2v_n - 1}{2v_n + 1}\right) = -2$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ b_{n+1} = b_n - 2$

c'est-à-dire (b_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $b_0 = 1$

b) • On a: (b_n) est une suite arithmétique, donc $b_n = b_0 + nr$

et puisque $b_0 = 1$ et $r = -2$; alors ; $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ b_n = 1 - 2n$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a: $b_n = \frac{2}{2v_n + 1} \iff 2v_n + 1 = \frac{2}{b_n}$

$$\iff 2v_n = \frac{2}{b_n} - 1$$

$$\iff v_n = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{2}$$

$$\iff v_n = \frac{1}{1 - 2n} - \frac{1}{2}$$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = \frac{1 + 2n}{2 - 4n}$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 3

1) a) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n < 1$

• Initialisation: pour $n = 0$; on a: $0 \leq u_0 < 1$ car $u_0 = 0$

• Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$:

Supposons que $0 \leq u_n < 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} < 1$

- On a: $u_n \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2u_n + 1 \geq 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 0 \qquad (1)$$

- d'autre part: $1 - u_{n+1} = 1 - \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} = \frac{1 - u_n}{u_n + 2}$

et puisque $1 - u_n > 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence) et $u_n + 2 > 0$

alors $1 - u_{n+1} > 0$ c'est à dire $u_{n+1} < 1$ (2)

de (1) et (2) on déduit que: $0 \leq u_{n+1} < 1$

• Conclusion: d'après le principe de récurrence ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n < 1$

b) Étudions la monotonie de (u_n): Soit $n \in \mathbb{N}$; on a:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 2} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2}$$

et puisque $0 \leq u_n < 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} > u_n$ c'est-à-dire la suite (u_n) est strictement croissante

2) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a: $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} + 1} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right) = \frac{1}{3} v_n$

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$

Par conséquent, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$, et de premier terme $v_0 = -1$ ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_n = v_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

b) Éxprimons u_n en fonction de n :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \iff (u_n + 1)v_n = u_n - 1$$
$$\iff u_n.v_n - u_n = -1 - v_n$$
$$\iff u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n}$$
$$\iff u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}$$

finalement : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}$

Exercice 4

1) Calculons d_{n+1} en fonction de d_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $d_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$
$$= 2v_n - u_n - v_n$$
$$= v_n - u_n$$
$$= -d_n$$

donc (d_n) est une suite géométrique de raison $q = -1$ et de premier terme $d_1 = 1$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $d_n = d_1(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$

2) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $u_{n+2} = 2v_{n+1} = 2(u_n + v_n) = 2u_n + 2v_n = 2u_n + u_{n+1}$

3) a) • Montrons que la suite (x_n) est géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $x_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+2} = u_{n+1} + u_{n+1} + 2u_n$
$$= 2(u_{n+1} + u_n) = 2x_n$$

donc (x_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $x_1 = 1$

• Montrons que (y_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $y_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1}$
$$= u_{n+1} + 2u_n - 2u_{n+1} = -(u_{n+1} - 2u_n) = -y_n$$

donc (y_n) est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $y_1 = -2$

Déduction: on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $x_n = (2)^{n-1}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $y_n = 2(-1)^n$

or $\begin{cases} x_n = u_{n+1} + u_n \\ y_n = u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

For more visit: L9ray.com CamScanner

donc $u_n = \frac{x_n - y_n}{3}$ d'où $u_n = \frac{(2)^n - 2(-1)^n}{3}$

b) Éxprimons v_n en fonction de n : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $v_n = \frac{1}{2}u_{n+1}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n = \frac{(2)^n - 2(-1)^{n+1}}{6}$

Exercice 5

1) a) On a: $u_2 = \frac{1}{3}u_1$ et $u_3 = \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{4}$ car: $4u_3 = 2u_2 - 1$

donc: $u_3 = \frac{1}{6}u_1 - \frac{1}{4}$

b) On a: La suite $(\alpha_n)_n$ vérifie la relation (E) signifie que:

$(n+2)\alpha_{n+1} = n\alpha_n + 1 - n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Signifie que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (n+2)(an+a+b) = n(an+b)+1-n$

Signifie que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ an^2 + an + bn + 2an + 2a + 2b = an^2 + bn + 1 - n$

Signifie que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (3a+1)n + 2a + 2b - 1 = 0$

donc: $\begin{cases} 3a + 1 = 0 \\ 2a + 2b = 1 \end{cases}$ c'est à dire: $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{5}{6}$.

D'où la suite $(\alpha_n)_n$ vérifie (E) lorsque: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n = -\frac{1}{3}n + \frac{5}{6}$

2) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $x_{n+1} = \frac{n}{n+2}x_n$

on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (n+2)\alpha_{n+1} = n\alpha_n + 1 - n$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (n+2)u_{n+1} = nu_n + 1 - n$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (n+2)(u_{n+1} - \alpha_{n+1}) = n(u_n - \alpha_n)$ (car (u_n) et (α_n) vérifient (E)).

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (n+2)x_{n+1} = nx_n$

c'est à dire $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ x_{n+1} = \frac{n}{n+2}x_n$

b) D'après la question précédente on a: $x_2 = \frac{1}{3}x_1$

$x_3 = \frac{2}{4}x_2$

$x_4 = \frac{3}{5}x_3$

$\vdots$

$x_n = \frac{n-1}{n+1}x_{n-1}$

En multipliant membre à membre les égalités précédentes, et après simplification, on obtient : $x_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \ldots \times (n-1)}{3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (n+1)}x_1 = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et puisque $u_n = x_n + \alpha_n$ et (α_n) vérifie (E), alors $\alpha_n = -\frac{1}{3}n + \frac{5}{6}$

et $u_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{3}n + \frac{5}{6}$

c) Calculons S_n et T_n

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Donc : $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $S_n = \frac{n}{n+1}$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$

$= S_n + \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{3}k + \frac{5}{6} = S_n - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{6}$

$= S_n - \frac{1}{3}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{5}{6}n$

$= S_n - \frac{n(4-n)}{6} = \frac{n}{n+1} - \frac{n(4-n)}{6}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $T_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n(4-n)}{6}$

IV Limites usuelles

Pour tout p de $\mathbb{N}^*$; on a: • $\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ • $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^p} = +\infty$

• $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ • $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p}} = 0$

• Si: $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$ alors: $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ • Si: $\alpha \in \mathbb{Q}^{*-}$ alors: $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$

Soit q un réel.

• Si $q > 1$ alors: $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

• Si $q = 1$ alors: $\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$

• Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'admet pas de limite

For more visit: L9ray.com CamScanner

V Convergence d'une suite

Soit $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geqslant n_0\}$ avec n_0 un entier naturel.

Définition:

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est une suite convergente si elle admet une limite l, et on écrit: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
- Toute suite non convergente est dite divergente

VI Critères de convergence d'une suite

1) Critères de convergence d'une suite:

- Si $(\forall n\geqslant n_0)$; $|u_n-\ell|\leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$, alors la suite $(u_n)_{n\in I}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.
- Si: $(\forall n\geqslant n_0)$; $w_n\leq u_n\leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\ell$, alors la suite $(u_n)_{n\in I}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$
- Si $(\forall n\geqslant n_0)$; $v_n\leq u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$, alors: (u_n) est une suite divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
- Si $(\forall n\geqslant n_0)$; $u_n\leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors: (u_n) est une suite divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

2) Propriétés:

Propriété 1: • Toute suite croissante et majorée est convergente.

• Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Propriété 2: Si $\begin{cases}(\exists k\in\mathbb{N});(\forall n\geqslant k);u_n\geqslant 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell\end{cases}$ alors $\ell\geqslant 0$

Propriété 3: Si $\begin{cases}(\exists k\in\mathbb{N});\forall n\geqslant k\,,u_n\leq v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'\end{cases}$ alors $\ell\leq\ell'$

Propriété 4: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

Exercices d'application

Exercice 6

1) On considère la suite numérique (v_n) telle que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$$

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que:

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \; ; \; \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+2}$$

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

2) On considère la suite numérique (w_n) définie par:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; w_n = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$$

a) Déterminer w_n en fonction de n. Remarquer:

$$\frac{1}{\sqrt{p-1}+\sqrt{p}} = \sqrt{p} - \sqrt{p-1}$$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$

Exercice 7

Déterminer dans chacun des cas suivant, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

1) $u_n = \frac{\cos n}{n}$ 2) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 3) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

4) $u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$ 5) $u_n = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2$ 6) $u_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} E(kx)$

Exercice 8

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = u_n + \alpha^n \end{cases}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Étudier la convergence de la suite (u_n).

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 9

Soit (u_n) une suite d'entiers naturels telle que (u_n) est strictement croissante

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\,; u_n \geq n$

2) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 10

1) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); Arc\tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - Arc\tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = Arc\tan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$, et on considère la suite numérique (S_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

b) Déterminer S_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 11

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$

1) a) Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n < 2$

2) On pose: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer u_n en fonction de n c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 12

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \frac{n}{2^n} + 1$

1) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2) a) Montrer que: $(\forall n \in (\mathbb{N}^* - \{1\}))\ ;\ 2^n > C_n^2$

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ ;\ 1 < u_n < \frac{2}{n-1} + 1$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 13

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \ ; \ u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}\right) \end{cases}$

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$.

3) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

4) Pour tout n de $\mathbb{N}$; on pose: $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$, montrer que (v_n) est une suite géométrique que, puis exprimer v_n et u_n en fonction de n.

5) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 14

1) Montrer que: $(\forall x \in]0,1[) \ ; \ \sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

2) Soit (u_n) la suite numérique définie que: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ u_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right).u_{n-1} \end{cases}$

Écrire u_n en fonction de n

3) Pour tout n de $\mathbb{N}$; on pose: $v_n = u_n.\sqrt{n+1}$ et $w_n = u_n.\sqrt{n}$

a) Montrer que la suite (v_n) est strictement décroissante et que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ u_n < \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

b) Montrer que la suite (w_n) est strictement croissante et que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{4\sqrt{n}} \leq u_n$$

c) Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 15

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}} \end{cases}$

1) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$; on pose $v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{8}$;

b) Exprimer u_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 16

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, 2^n > n$

2) On considère la suite numérique (x_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante et majorée, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) On considère la suite (y_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$

Montrer que la suite (y_n) est majorée, et en déduire qu'elle est convergente.

Exercice 17

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} \end{cases} ; \; n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, 0 < u_n < 2$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)

3) a) Montrer que pour tout de n de $\mathbb{N}$ on a: $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N})\;;\; 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente , puis calculer: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 18

On a: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases} ; \; n \in \mathbb{N}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 3$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)

3) a) Montrer que: $u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

c) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

Exercice 19

Soit (u_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 2^n$, et en déduire $\lim u_n$.

2) on pose : $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k + 1}$

a) Vérifier que: $\frac{1}{1 + u_k} = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}$ pour tout k de $\mathbb{N}$

b) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

Exercice 20

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}} \end{cases}$

1) Montrer que la suite (u_n) est convergente, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

2) Calculer de deux façons la somme suivante $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ où $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $v_k = \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2}$,

puis en déduire que: $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n^2 = 1$

Exercice 21

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 > \sqrt[3]{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right) \end{cases}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$.

2) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_n + \sqrt[3]{2}}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{2})^2$ (1)

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq \sqrt[3]{2}$.

c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

3) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_n - \sqrt[3]{2})$.

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n - \sqrt[3]{2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n . (u_0 - \sqrt[3]{2})$.

c) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 22

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par: $u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n \leq 1$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) , en déduire qu'elle est convergente.

3) Montrer que récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})\, u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$; puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Solutions

Exercice 6

1) a) Déterminons a, b et c tels que:

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \; ; \; \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+2}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$; on a:

$$\frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+2} \Leftrightarrow \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{a(p+1)(p+2) + bp(p+2) + cp(p+1)}{p(p+1)(p+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{(a+b+c)p^2 + (3a+2b+c)p + 2a}{p(p+1)(p+2)}$$

donc: $(\forall p \in \mathbb{N}^*) \; ; \; (a+b+c)p^2 + (3a+2b+c)p + 2a = 1$

d'où $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases}$ par conséquent: $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$ (Après résolution du système)

For more visit: L9ray.com CamScanner

ainsi: $(\forall p \in \mathbb{N}^*) : \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2p+4}$

b) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$;

on a:

$$v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2p+4} \right)$$

$$= \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} \right) - \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} \right) + \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p+4} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{2n+4} \right)$$

$$= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{3}{4} + 2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{n+1}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{n+1}$

• Calculons $\lim_{n \to +\infty} v_n$

on a: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+4} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc : $\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{4}$

2) a) Déterminons w_n en fonction de n

on a: $(\forall p \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}} = \sqrt{p} - \sqrt{p-1}$

donc pour $p = 2$: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

pour $p = 3$: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

pour $p = 4$: $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \sqrt{4} - \sqrt{3}$.

$\vdots$ $\quad\quad$ $\vdots$ $\quad\quad$ $\vdots$

pour $p = n$: $\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

Par sommation des égalités membre à membre , et après simplification , on obtient $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n} - 1$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; w_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $w_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

Exercice 7

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; u_n = \dfrac{\cos n}{n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a : $-1 \leq \cos n \leq 1$ donc $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; -\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$ et puisque: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$ alors, d'après les critères de convergence $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a: $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = 0$ donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3) $(\forall n \in \mathbb{N})\,; u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}+\sqrt{n} = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

4) $(\forall n \geq 2)\,; u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que: $n \geq 2$

$$u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{n\left(1-\dfrac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)} = \frac{1-\dfrac{(-1)^n}{n}}{1+\dfrac{(-1)^n}{n}}$$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{(-1)^n}{n}}{1+\dfrac{(-1)^n}{n}} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

5) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; u_n = \dfrac{1}{n^3}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

on rappelle que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$; on a: $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \frac{1}{n^3} \times \frac{n^3\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)}{6} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

et puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$

donc: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$

6) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} E(kx)$ (où $x \in \mathbb{R}^*$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $(\forall k \in \{1;2;....,n\}); kx - 1 < E(kx) \leq kx$

donc $\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \sum_{k=1}^{n} kx$

et on a: $\sum_{k=1}^{n} kx = x\sum_{k=1}^{n} k = x \times \frac{n(n+1)}{2}$

et $\sum_{k=1}^{n}(kx-1) = \sum_{k=1}^{n} kx - \sum_{k=1}^{n} 1 = x \times \frac{n(n+1)}{2} - n$

d'où $x \times \frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq x \times \frac{n(n+1)}{2}$

c'est-à-dire: $x \times \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq x \times \frac{n(n+1)}{2n^2}$

par suite: $(\forall n \in IN^*); x \times \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < u_n \leq x \times \frac{n(n+1)}{2n^2}$

et puisque : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$

alors $\lim_{n\to+\infty} x \times \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{x}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} x \times \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} = \frac{x}{2}$

et d'après les critères de convergence on a: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}$

Exercice 8

Étudions la convergence de la suite (u_n)

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} - u_n = \alpha^n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a: $(\forall k \in \{1;...;n\})$; $\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et puisque: $\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$

$= \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

$= u_n - u_0 = u_n - 1$

alors: $u_n - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k$ c'est-à-dire: $u_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k$

donc: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1} \end{cases}$

1er cas: si $\alpha = 1$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 1$ donc $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = n + 1$

donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2ème cas: Si $\alpha \neq 1$ alors $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 1 + \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$

• Si: $-1 < \alpha < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} \alpha^n = 0$

d'où $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$ par conséquent: $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2 - \alpha}{1 - \alpha}$

La suite (u_n) est donc convergente et sa limite est $\frac{2 - \alpha}{1 - \alpha}$

• Si $\alpha > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} \alpha^n = +\infty$

donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = +\infty$ d'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

La suite est donc divergente.

• Si $\alpha \leq -1$ alors la suite (α^n) est divergente et n'admet pas de limite.

d'où la suite (u_n) est divergente car elle n'admet pas de limite.

Exercice 9

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq n$

Utilisons le raisonnement par récurrence

(u_n) est une suite d'entiers naturels signifie que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in \mathbb{N}$

• Initialisation: pour $n = 0$, on a: $u_0 \in \mathbb{N}$, donc: $u_0 \geq 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $u_n \geq n$ et montrons que:

$$u_{n+1} \geq n+1$$

on a: (u_n) est strictement croissante, donc $u_{n+1} > u_n$

et puisque: $u_n \geq n$ alors $u_{n+1} > n$ et on a: $n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$,

donc: $u_{n+1} \geq n+1$

Rappel: $(\forall (x;y) \in \mathbb{Z}^2); x > y \Leftrightarrow x \geq y+1$

Conclusion: d'après le principe de récurrence on a: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq n$

2) Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

on a: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

donc d'après les critères de convergence: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 10

1) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); Arc\tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - Arc\tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$

On pose: $\alpha = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\beta = Arc\tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$ c'est à dire: $\tan\alpha = \frac{1}{x}$

et $\tan\beta = \frac{1}{1+x}$ tels que: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

On a: $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha.\tan\beta}$

$$= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}}{1 + \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{x(1+x)}}{\frac{x(x+1)+1}{x(1+x)}} = \frac{1}{x(x+1)+1} = \frac{1}{1+x+x^2}$$

et puisque: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ alors $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$

donc $\alpha - \beta = Arc\tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$

c'est à dire: $Arc\tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - Arc\tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$

d'où $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); Arc\tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - Arc\tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Calculons: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a: $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+n+n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n+n^2} = 0$

et puisque la fonction $Arc\tan$ est continue en 0 ; alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} Arc\tan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = Arc\tan(0) = 0$، c'est-à-dire: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

b) • Déterminons S_n en fonction de n.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; On a: $(\forall k \in \{1;2;3,...;n\})$;

$$u_k = Arc\tan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) = Arc\tan\left(\frac{1}{k}\right) - Arc\tan\left(\frac{1}{1+k}\right)$$

donc: $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(Arc\tan\left(\frac{1}{k}\right) - Arc\tan\left(\frac{1}{1+k}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} Arc\tan\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n} Arc\tan\left(\frac{1}{1+k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} Arc\tan\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=2}^{n+1} Arc\tan\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= Arc\tan(1) + \sum_{k=2}^{n} Arc\tan\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=2}^{n} Arc\tan\left(\frac{1}{k}\right) - Arc\tan\left(\frac{1}{1+n}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - Arc\tan\left(\frac{1}{1+n}\right)$$

• Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n} = 0$ et la fonction $Arc\tan$ est continue en 0;

donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} Arc\tan\left(\frac{1}{1+n}\right) = Arc\tan(0) = 0$;

par conséquent: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - Arc\tan\left(\frac{1}{1+n}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 11

1) Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante.

• Initialisation:

pour $n = 0$ on a: $u_1 - u_0 = \frac{2}{3}$، donc $u_1 - u_0 > 0$ d'où la propriété est vraie

pour $n = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_{n+1} - u_n > 0$ et montrons que $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

On a: $u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{2u_{n+1} + 3}{u_{n+1} + 2} - \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2}$

$$= \frac{2u_{n+1}u_n + 4u_{n+1} + 3u_n + 6 - 2u_{n+1}u_n - 3u_{n+1} - 4u_n - 6}{(u_n + 2)(u_{n+1} + 2)}$$

$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_n + 2)(u_{n+1} + 2)}$$

On a: $u_{n+1} - u_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ (à vérifier par récurrence) d'où $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est à dire la suite (u_n) est strictement croissante

b) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n < 2$, utilisons le raisonnement par récurrence.

• Initialisation: pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ donc $u_0 < 2$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n < 2$ et montrons que $u_{n+1} < 2$

On a: $u_{n+1} - 2 = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} - 2 = \dfrac{-1}{u_n + 2}$

et puisque $u_n + 2 > 0$ alors $u_{n+1} - 2 < 0$ c'est à dire $u_{n+1} < 2$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n < 2$

2)Montrons que la suite (v_n) est géometrique

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \frac{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \sqrt{3}}{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{3})u_n + 3 - 2\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})u_n + 3 + 2\sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})u_n - \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})} = \frac{(2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(u_n + \sqrt{3})}$$

donc $v_{n+1} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} v_n = (7 - 4\sqrt{3})\, v_n$

For more visit: L9ray.com CamScanner

d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $7-4\sqrt{3}$ et de premier terme $v_0 = -2+\sqrt{3}$

b) Déterminons u_n en fonction de n.

on a: $v_n = (\sqrt{3}-2)(7-4\sqrt{3})^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (car (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -2+\sqrt{3}$ et de raison $q = 7-4\sqrt{3}$

on a: $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, donc $v_n u_n + \sqrt{3}v_n = u_n - \sqrt{3}$

c'est à dire: $u_n(v_n - 1) = -\sqrt{3}v_n - \sqrt{3}$ d'où $u_n = \dfrac{\sqrt{3}v_n + \sqrt{3}}{1 - v_n}$

par conséquent: $u_n = \dfrac{(-2+\sqrt{3})\sqrt{3}(7-4\sqrt{3})^n + \sqrt{3}}{1+(2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})^n}$

c) Calculons: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

on a: $\lim\limits_{n\to+\infty}(7-4\sqrt{3})^n = 0$ (car $-1 < 7-4\sqrt{3} < 1$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$

Exercice 12

1) a) Montrons que la suite (u_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} + 1 - \dfrac{n}{2^n} - 1 = \dfrac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \dfrac{1-n}{2^{n+1}}$

et puisque $n \in \mathbb{N}^*$; alors $1-n \leq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$, d'où (u_n) est décroissante

b) Montrons que la suite (u_n) est convergente

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n > 1$ (car $u_n - 1 = \dfrac{n}{2^n}$), donc la suite (u_n) est minorée par 1, et puisqu'elle est décroissante alors (u_n) est convergente.

2) a- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $2^n > C_n^2$

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; On a:

$2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i 1^i \times 1^{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$

donc $2^n - C_n^2 = 1 + C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^n$ d'où $2^n - C_n^2 > 0$ ainsi; $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; $2^n > C_n^2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) Déduisons que: $1 < u_n < \frac{2}{n-1} + 1$

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $2^n > C_n^2$ donc $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{C_n^2}$ d'où: $1 < u_n < \frac{n}{C_n^2} + 1$

et puisque $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2}$ alors: $1 < u_n < \frac{n}{(n-1)\frac{n}{2}} + 1$

c'est à dire: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$: $1 < u_n < \frac{2}{n-1} + 1$

c) Calculons $\lim u_n$

On a: $1 < u_n < \frac{2}{n-1} + 1$ et $\lim \frac{2}{n-1} + 1 = 1$ donc; $\lim u_n = 1$ (d'après les critères de convergence)

Exercice 13

1) Calculons u_2 et u_3

on a: $\frac{1}{u_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}$ donc $u_2 = \frac{2}{3}$

- on a: $\frac{1}{u_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{2}{3}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{5}{4}$ donc $u_3 = \frac{4}{5}$

2) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$

- Initialisation:

Pour: $n = 0$ on a: $\frac{2u_0}{4u_0 - 1} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{4 \times \frac{1}{2} - 1} = 1 = u_1$ donc $u_1 = \frac{2u_0}{4u_0 - 1}$

- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$;

Supposons que: $u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$ et montrons que: $u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}}{4u_{n+1} - 1}$

On a: $u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

donc: $u_n = \frac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2}$ or: $\frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}\right)$

donc:

$$\frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + u_{n+1}}{u_{n+1} \times u_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{\frac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2} + u_{n+1}}{u_{n+1} \times \frac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2}} = \frac{1}{2}\frac{4u_{n+1}^2 - u_{n+1}}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{2}\frac{4u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}$$

ainsi $u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}}{4u_{n+1} - 1}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{4u_n - 1}$

3) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ (par récurrence)

• Initialisation: pour $n = 0$ on a: $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq 1$ donc $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$

la propriété est vraie pour $n = 0$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et montrons que $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

- on a: $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2u_n}{4u_n - 1} - 1 = \dfrac{1 - 2u_n}{4u_n - 1}$

et puisque: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ alors: $1 - 2u_n \leq 0$ et $4u_n - 1 > 0$

donc: $u_{n+1} - 1 \leq 0$ ainsi $u_{n+1} \leq 1$

- Et on a: $u_{n+1} - \frac{1}{2} = \dfrac{2u_n}{4u_n - 1} - \frac{1}{2} = \dfrac{1}{2(4u_n - 1)}$

et puisque $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ alors $4u_n - 1 > 0$; donc $u_{n+1} - \frac{1}{2} \geq 0$ ainsi $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$، la propriété est vraie pour $n + 1$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$

4) Montrons que la suite (v_n) est géometrique , puis calculons v_n et u_n en fonction de n

• Soit $n \in \mathbb{N}$; on a: $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \frac{4}{3} = \dfrac{1}{\frac{2u_n}{4u_n - 1}} - \frac{4}{3} = \dfrac{4u_n - 1}{2u_n} - \frac{4}{3}$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2u_n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}\right)$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

• Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.

On a: (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme

For more visit: L9ray.com CamScanner

$v_0 = \frac{2}{3}$ donc $v_n = v_0 \times (q)^n = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et puisque $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$ alors $u_n = \frac{3}{3v_n + 4}$

donc $u_n = \frac{3}{3 \times \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4}$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{3}{4 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

5)Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

on a: $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ d'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{4}$

Exercice 15

1) Montrons que: $(\forall x \in]0,1]) \; ; \; \sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Soit x un élément de $]0;1]$; on a: $\sqrt{1-x} - 1 = \frac{-x}{\sqrt{1-x}+1}$

et puisque $\sqrt{1-x} < 1$

alors $\sqrt{1-x} + 1 < 2$ donc $\frac{1}{\sqrt{1-x}+1} > \frac{1}{2}$ d'où $\frac{-x}{\sqrt{1-x}+1} < -\frac{x}{2}$

c'est-à-dire $\sqrt{1-x} - 1 < -\frac{x}{2}$ ainsi $\sqrt{1-x} < 1 - \frac{x}{2}$ (1)

on a aussi $\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 = \frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{-x}{\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})}$

et puisque: $\sqrt{1+x} > 1$ et $\sqrt{1+x} + 1 \geq 2$ alors $\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x}) > 2$

donc $\frac{1}{\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})} < \frac{1}{2}$ par suite $\frac{-x}{\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})} > -\frac{x}{2}$

c'est-à-dire: $\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 > -\frac{x}{2}$ d'où $\frac{1}{\sqrt{1+x}} > 1 - \frac{x}{2}$ (2)

de (1) et (2) on déduit que: $(\forall x \in]0;1]) \quad \sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

2) a) Exprimons u_n en fonction de n

On a: $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_k = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) u_{k-1}$

donc, pour $k = n$ on a: $u_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) u_{n-1}$

Pour $k = n-1$ $u_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) u_{n-2}$

. .
. .
. .

For more visit: L9ray.com CamScanner

Pour $k = 2$ $\quad u_2 = \left(1 - \frac{1}{2 \times 2}\right) u_1$

Pour $k = 1$ $\quad u_1 = \left(1 - \frac{1}{2 \times 1}\right) u_0$

Par produit des inégalités précédentes membre à membre, et après simplification, on obtient: $u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{2n}\right) u_0$

donc: $u_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2 \times 2}\right) \ldots \times \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times \frac{2n-1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots\ldots \times (2n-1) \times 2n}{(2 \times 4 \times 6 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times 2n)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (1 \times 2 \times \ldots\ldots \times n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} \times (n!)^2}$$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$

3) Montrons que la suite (v_n) est strictement décroissante

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = u_{n+1}\sqrt{n+2}$ et $v_n = u_n\sqrt{n+1}$

et on a $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n > 0$ (à vérifier)

donc : $\quad v_{n+1} = u_{n+1}\sqrt{n+2} = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) u_n \sqrt{n+2}$

d'où:

$$v_{n+1} - v_n = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) u_n \sqrt{n+2} - u_n\sqrt{n+1}$$

$$= u_n\sqrt{n+2}\left(1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right) = u_n\sqrt{n+2}\left(1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{n+1}\right) - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)$$

et d'après la question 1 on a: $\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}}$ (car $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$)

c'est-à-dire: $\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) < \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} - v_n < 0$

Pa suite, la suite (v_n) est strictement décroissante.

• Montrons que: $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n < \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad v_n = u_n\sqrt{n+1}$ donc $u_n = \frac{v_n}{\sqrt{n+1}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et puisque la suite (v_n) est strictement décroissante, alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n < v_0$

donc $u_n < \frac{v_0}{\sqrt{n+1}}$

et comme, $v_0 = u_0\sqrt{0+1} = \frac{1}{2}$ alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n < \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

b) Montrons que la suite (w_n) est strictement croissante

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a: $w_{n+1} - w_n = u_{n+1}\sqrt{n+1} - u_n\sqrt{n}$

$$= \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)u_n\sqrt{n+1} - u_n\sqrt{n}$$

$$= u_n\sqrt{n+1}\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$$

$$= u_n\sqrt{n+1}\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} - \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}\right)$$

et d'après la question 1) on a: $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right) > \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)}$ (car $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$)

donc $w_{n+1} - w_n > 0$, d'où la suite (w_n) est strictement croissante

• Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\frac{1}{4\sqrt{n}} \leq u_n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a: $w_n = u_n\sqrt{n}$ donc $u_n = \frac{w_n}{\sqrt{n}}$

et puisque (w_n) est une suite strictement croissante, alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $w_n \geq w_1$

c'est-à- dire: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $w_n \geq \frac{1}{4}$ d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}$

c) Etudions la convergence de la suite (u_n)

On a: d'après ce qui précède: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\frac{1}{4\sqrt{n}} \leq u_n < \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

Les suites (S_n) et (S'_n) définies par: $S_n = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ et $S'_n = \frac{1}{4\sqrt{n}}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ sont convergentes, et on a: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n = 0$, donc (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 15

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ en utilisant le raisonnement par récurrence

• Initialisation: pour $n = 0$; on a: $u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$

Et puisque $\frac{2}{7} > \frac{1}{7}$ alors $\sqrt[3]{\frac{2}{7}} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ alors $u_0 > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ et montrons que $u_{n+1} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

on a: $u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}} \Rightarrow u_n^3 > \frac{1}{7}$

$$\Rightarrow 1 + u_n^3 > \frac{1}{7} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 + u_n^3}{8} > \frac{1}{7}$$

et puisque la fonction: $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, alors $\sqrt[3]{\frac{1 + u_n^3}{8}} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ c'est à dire: $u_{n+1} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

b) Déduction:

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1 + u_n^3}{8}}}{u_n} = \sqrt[3]{\frac{1 + u_n^3}{8u_n^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8u_n^3} + \frac{1}{8}}$

donc : $u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}} \Rightarrow u_n^3 > \frac{1}{7}$

$$\Rightarrow 8u_n^3 > \frac{8}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8u_n^3} < \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{8u_n^3} + \frac{1}{8} < 1$$

et puisque la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

alors $\sqrt[3]{\frac{1}{8u_n^3} + \frac{1}{8}} < 1$ c'est-à-dire: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$; donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

c) Montrons que la suite (u_n) est convergente

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $u_n > 0$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} < u_n$, c'est-à-dire la suite (u_n) est strictement décroissante , et puisqu'elle est minorée par $\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$; alors elle est convergente.

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) a) Montrons que la suite (v_n) est géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a: $v_{n+1} = \frac{7}{8}u_{n+1}^3 - \frac{1}{8}$

et puisque $u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}}$ alors $u_{n+1}^3 = \frac{1+u_n^3}{8}$

donc $v_{n+1} = \frac{7}{8}\left(\frac{1}{8} + \frac{u_n^3}{8}\right) - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8} + \frac{7}{8}u_n^3 - 1\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}v_n$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{8}v_n$

Par conséquent; (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{8}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{8}$

b) • Calculons u_n en fonction de n

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{8}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{8}$,

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$ c'est à dire: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a: $v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8} \iff 8v_n + 1 = 7u_n^3$

$\iff u_n^3 = \frac{1}{7}(8v_n + 1)$

$\iff u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}(8v_n + 1)}$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^n + 1\right)}$

• Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Puisque $-1 < \frac{1}{8} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\frac{1}{7}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^n + 1\right) = \frac{1}{7}$

et puisque la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue en $\frac{1}{7}$

alors: $\lim\limits_{n \to +\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{7}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^n + 1\right)} = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

Exercice 16

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2^n > n$

• 1er cas si $n = 0$; on a: $2^0 = 1$ et $1 > 0$ donc $2^0 > 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• 2ème cas : si $n \neq 0$

On a: $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

$= C_n^0 + C_n^1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k$

$= 1 + n + \sum_{k=2}^{n} C_n^k$

donc $2^n - n = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k$ et puisque $1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k > 0$, alors $2^n - n > 0$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); 2^n > n$

2) Montrons que la suite (x_n) est strictement croissante

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a: $x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2}$

donc $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ et puisque $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ alors $x_{n+1} - x_n > 0$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); x_{n+1} > x_n$, ainsi le suite (x_n) est strictement croissante

• Montrons que la suite (x_n) est majorée.

Soit k un élément de n tel que $k \geqslant 2$

on a: $k \geq 2$ donc $k^2 > k^2 - k \iff \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2 - k}$ (car $k^2 - k > 0$)

$\iff \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

donc $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}); \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

et on a: $\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}); \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N} - \{0;1\}$; on a: $x_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + 1 - \frac{1}{n}$

c'est-à-dire $x_n < 2 - \frac{1}{n}$, et puisque $2 - \frac{1}{n} < 2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et on a: $x_1 = 1$, donc $x_1 < 2$

donc ; $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n < 2$

c'est à dire: la suite (x_n) est majorée par 2.

on a: (x_n) est une suite croissante et majorée, donc elle est convergente

3) Montrons que la suite (y_n) est majorée

Soit n et k deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que: $k \leq n$

on a: $2^k > k$ donc $k \times 2^k > k^2$ d'où: $\frac{1}{k2^k} < \frac{1}{k^2}$ ainsi : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

c'est à dire $y_n < x_n$ et comme $x_n < 2$ alors $y_n < 2$,

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; y_n < 2$, c'est à dire (y_n) est une suite majorée par 2 (1)

• Étudions la monotonie de la suite (y_n)

Soit n un élément de $\mathbb{N}$ on a:

$$y_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k2^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} + \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = y_n + \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

c'est-à-dire: $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

d'où $y_{n+1} - y_n > 0$ (car $\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} > 0$)

Ainsi , $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; y_{n+1} > y_n$

c'est-à-dire la suite (y_n) est strictement croissante (2), donc de (1) et (2) on déduit que la suite (y_n) est convergente.

Exercice 17

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < 2$ (utilisons le raisonnement par récurrence)

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Initialisation: pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < 2$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 2$

- puisque $u_n > 0$ alors $u_n^3 + 2 > 0$ et $u_n^2 + 1 > 0$, donc $u_{n+1} > 0$ (1)

- On a $u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n^3 - 2u_n^2}{u_n^2 + 1} = \dfrac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n - 2)$

et puisque $u_n - 2 < 0$ et $\dfrac{u_n^2}{u_n^2 + 1} > 0$, alors $u_{n+1} - 2 < 0$

c'est à dire $u_{n+1} < 2$ (2)

de (1) et (2) on déduit que $0 < u_{n+1} < 2$

Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 2$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ on a: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} - u_n = \dfrac{2 - u_n}{u_n^2 + 1}$

et puisque $0 < u_n < 2$; alors $u_{n+1} - u_n > 0$; donc $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} > u_n$

D'où la suite (u_n) est strictement croissante

3) a) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 2 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(2 - u_n)$

On a: $2 - u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(2 - u_n)$

Il suffit de montrer que: $\dfrac{u_n^2}{u_n^2 + 1} \leq \dfrac{4}{5}$

On a $\dfrac{u_n^2}{u_n^2 + 1} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{u_n^2 - 4}{5(u_n^2 + 1)} = \dfrac{(u_n - 2)(u_n + 2)}{5(u_n^2 + 1)}$

et puisque $0 < u_n < 2$ alors $u_n - 2 < 0$ et $u_n + 2 > 0$ et on a $5(u_n^2 + 1) > 0$

donc $\dfrac{u_n^2}{1 + u_n^2} - \dfrac{4}{5} \leq 0$ c'est à dire: $\dfrac{u_n^2}{1 + u_n^2} \leq \dfrac{4}{5}$

on a: $\dfrac{u_n^2}{1 + u_n^2} \leq \dfrac{4}{5}$ et $2 - u_n > 0$

Donc $\dfrac{u_n^2}{1 + u_n^2}(2 - u_n) \leq \dfrac{4}{5}(2 - u_n)$

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 2 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(2 - u_n)$

b) Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 2 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ (utilisons un raisonnement par récurrence)

• Initialisation: pour $n = 0$ on a: $2 - u_0 = 1$ et $\left(\dfrac{4}{5}\right)^0 = 1$ et $0 < 1 \leq 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

donc $0 < 2 - u_0 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$;

Supposons que $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ et montrons que $0 < 2 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

on a: $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ donc $0 < \frac{4}{5}(2 - u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

et d'après la question 3) a) on a: $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$

donc $0 < 2 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) Montrons que (u_n) est convergente et calculons $\lim u_n$

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle est convergente

et on a: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - 2| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

et puisque $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{4}{5} < 1$) alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$

Exercice 18

on a: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 3$

• Initialisation: pour $n = 0$ on a: $u_0 = 4$ donc $u_0 > 3$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$

• Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 3$ et montrons que $u_{n+1} > 3$

On a: $u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$

$u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}$ (car $2x^2 - 3x - 9 = (x - 3)(2x + 3)$)

et puisque $u_n > 3$ alors $u_n - 3 > 0$ et $2u_n + 3 > 0$ et $u_n + 2 > 0$

donc $u_{n+1} - 3 > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 3$

Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 3$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2}$

et puisque $u_n > 3$ alors $\dfrac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2} > 0$ donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} > u_n$

d'où (u_n) est une suite strictement croissante.

3) a) On a: $u_{n+1} - 3 = (u_n - 3)\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2}$ et on a: $\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{u_n}{2(u_n + 2)}$

et puisque $u_n > 3 > 0$ alors $\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \dfrac{3}{2} > 0$

c'est à dire: $\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} > \dfrac{3}{2}$

et puisque $u_n - 3 > 0$ alors $\dfrac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2} > \dfrac{3}{2}(u_n - 3)$

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(u_n - 3)$

b) Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$

Méthode 1: (par récurrence)

• Initialisation:

pour $n = 0$ on a: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^0 + 3 = 4$ et $u_0 = 4$ donc $u_0 \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^0 + 3$

• Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que: $u_n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$ et montrons que: $u_{n+1} \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} + 3$

On a: $u_n - 3 \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ donc: $\dfrac{3}{2}(u_n - 3) \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$

et puisque $u_{n+1} - 3 \geq \dfrac{3}{2}(u_n - 3)$ (d'après la question précédente)

alors $u_{n+1} - 3 \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$ c'est à dire: $u_{n+1} > 3 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$

Méthode 2:

Rappel: $\prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{a_n}{a_0}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $u_{n+1} - 3 \geq \dfrac{3}{2}(u_n - 3) \iff \dfrac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} \geq \dfrac{3}{2}$; car $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 3$

donc $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{u_{k+1} - 3}{u_k - 3}\right) \geq \prod_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)$; d'où: $\dfrac{u_n - 3}{u_0 - 3} \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

et puisque $u_0 = 4$ alors $u_0 - 3 = 1$; donc: $u_n - 3 \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

For more visit: L9ray.com CamScanner

d'où $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

c) on a: $\frac{3}{2} > 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ d'où $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3 = +\infty$

et puisque $u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ alors $\lim u_n = +\infty$ (d'après les critères de convergence)

Exercice 19

1) a) On a: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - u_n = u_n^2$

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - u_n \geq 0$ car $u_n^2 \geqslant 0$; Ainsi: la suite (u_n) est croissante

b) On a: (u_n) est croissante donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \geq u_0$ et $u_0 = 1$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \geq 1$

d'où:
$$u_n \geq 1 \Rightarrow u_n + 1 \geq 2$$
$$\Rightarrow u_n(u_n + 1) \geq 2u_n$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 2u_n$$

et puisque $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n > 0$ (car $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \geq 1$) alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 2$

donc: $\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) \geq \prod_{k=0}^{n-1} 2$ c'est-à-dire $\frac{u_n}{u_0} \geq 2^n$

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \geq 2^n$

on a: $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ (car $2 > 1$) donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (d'après les critères de convergence)

2) a) Vérifions que: $\frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{1+u_{k+1}} + \frac{1}{u_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

On a: $(\forall k \in \mathbb{N})\ ;\ \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} = \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k u_{k+1}} = \frac{u_k(1 + u_k) - u_k}{u_k u_{k+1}}$

$$= \frac{1 + u_k - 1}{u_{k+1}} = \frac{u_k}{u_k(1 + u_k)}$$

$$= \frac{1}{1 + u_k}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) on a: $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+u_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right) = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} = 1 - \frac{1}{u_n}$

et puisque $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$ donc (v_n) est une suite convergente

Exercice 20

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$

- Initialisation: pour $n = 0$ on a: $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$
- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

On a: $u_n > 0$ et $\sqrt{1 + u_n^2} > 0$,- donc $u_{n+1} > 0$

- Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$

d'autre part on a: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_n^2}}$

et puisque : $\sqrt{1 + u_n^2} > 1$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} < u_n$, d'où la suite (u_n) est décroissante

on a: (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$; On a: $v_k = \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = \frac{1 + u_{k-1}^2}{u_{k-1}^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = 1$

donc: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = 1$

d'autre part, on a: $\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} \right) = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = \frac{1}{u_n^2} - 1$

donc: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{n}$

Déduction : on a: $\frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{n} = 1$ donc $\frac{1}{nu_n^2} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$

d'où: $nu_n^2 = \frac{n}{n+1}$

et puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$

alors $\lim_{n \to +\infty} nu_n^2 = 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 21

1) a) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$

• Initialisation: pour $n = 0$ on a: $u_0 > \sqrt[3]{2}$ donc $u_0 > 0$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

on a: $u_n > 0$ donc $\frac{1}{u_n^2} > 0$ d'où: $\frac{2}{3}\left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right) > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$

2) a) Montrons l'égalité (E)

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right) - \sqrt[3]{2}$

c'est-à-dire: $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_n^3 - 3\sqrt[3]{2}\,u_n^2 + 2}{3u_n^2}$ (1)

et on a: $\frac{2u_n + \sqrt[3]{2}}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{2})^2 = \frac{(2u_n + \sqrt[3]{2})(u_n^2 - 2\sqrt[3]{2}\,u_n + \sqrt[3]{4})}{3u_n^2}$

c'est-à-dire : $\frac{2u_n + \sqrt[3]{2}}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{2})^2 = \frac{2u_n^3 - 3\sqrt[3]{2}\,u_n^2 + 2}{3u_n^2}$ (2)

de (1) et (2) on déduit que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_n + \sqrt[3]{2}}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{2})^2$

b) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq \sqrt[3]{2}$:

de la question précédente on déduit que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_{n-1} + \sqrt[3]{2}}{3u_{n-1}^2}(u_{n-1} - \sqrt[3]{2})^2$$

et puisque $(u_{n-1} - \sqrt[3]{2})^2 \geq 0$ et $\frac{2u_{n-1} + \sqrt[3]{2}}{3u_{n-1}^2} > 0$ alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n - \sqrt[3]{2} \geq 0$

c'est-à-dire $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n \geq \sqrt[3]{2}$ et puisque: $u_0 \geq \sqrt[3]{2}$ (d'après les données).

alors: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq \sqrt[3]{2}$

c) Montrons que (u_n) est croissante:

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

on a: $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3u_n^2} = \frac{-(u_n^3 - 2)}{3u_n^2} = -\frac{(u_n - \sqrt[3]{2})(u_n^2 + \sqrt[3]{2}\,u_n + \sqrt[3]{4})}{3u_n^2}$

et puisque $u_n - \sqrt[3]{2} \geq 0$ (d'après 2) b) et $u_n^2 + \sqrt[3]{2}\,u_n + \sqrt[3]{4} > 0$ (car $u_n > 0$) alors

For more visit: L9ray.com CamScanner

$u_{n+1} - u_n < 0$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} < u_n$ d'où la suite (u_n) est décroissante.

3) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_n - \sqrt[3]{2})$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a: $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_n + \sqrt[3]{2}}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{2})^2$ (d'après 2) a))

donc $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2u_n^2 - \sqrt[3]{2}\,u_n - \sqrt[3]{4}}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{2})$

c'est-à-dire: $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}\,u_n + \sqrt[3]{4}}{3u_n^2}\right)(u_n - \sqrt[3]{2})$

On a: $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}\,u_n + \sqrt[3]{4}}{3u_n^2} \geq 0$ car $u_n - \sqrt[3]{2} \geq 0$ et $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} \geq 0$

Donc: $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}\,u_n + \sqrt[3]{4}}{3u_n^2} \leq \frac{2}{3}$ (car $\frac{\sqrt[3]{2}\,u_n + \sqrt[3]{4}}{3u_n^2} > 0$) donc $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_n - \sqrt[3]{2})$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_n - \sqrt[3]{2})$

b) Déduction:

On a: $(\forall k \in \mathbb{N})$; $0 < u_{k+1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_k - \sqrt[3]{2})$

(on peut vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > \sqrt[3]{2}$)

Donc: Pour $k = n - 1$ $\quad 0 < u_n - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_{n-1} - \sqrt[3]{2})$

Pour $k = n - 2$: $\quad 0 < u_{n-1} - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_{n-1} - \sqrt[3]{2})$

. .
. .
. .

Pour $k = 0$: $0 < u_1 - \sqrt[3]{2} \leq \frac{2}{3}(u_0 - \sqrt[3]{2})$

En multipliant membre à membre ces doubles inégalités strictrement positives et après simplification: on obtient $0 < u_n - \sqrt[3]{2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \sqrt[3]{2})$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n - \sqrt[3]{2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \sqrt[3]{2})$

c) Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

on a $u_0 - \sqrt[3]{2} > 0$ (par hypothèse) et $-1 < \frac{2}{3} < 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n(u_0-\sqrt[3]{2})=0$ et on a aussi $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n-\sqrt[3]{2}>0$

et d'après les critères de convergence on a: $\lim_{n\to+\infty}(u_n-\sqrt[3]{2})=0$

donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt[3]{2}$

Exercice 22

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\le u_n\le 1$:

- Initialisation: pour $n=0$ on a: $u_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $0\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le 1$,donc $0\le u_0\le 1$
- Hérédité:

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons: $0\le u_n\le 1$ et montrons que: $0\le u_{n+1}\le 1$

on a: $0\le u_n\le 1$ donc: $0\le\frac{1}{2}\le\frac{1+u_n}{2}\le 1$ d'où $0\le\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\le 1$

c'est à dire: $0\le u_{n+1}\le 1$, par conséquent, la propriété est vraie pour $n+1$

- Conclusion: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\le u_n\le 1$

2) Étudions la monotonie de la suite (u_n)

Soit n un élément de $\mathbb{N}$,on a:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}-u_n=\frac{\frac{1+u_n}{2}-u_n^2}{u_n+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}}=\frac{-2u_n^2+u_n+1}{2\left(u_n+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)}=\frac{-(u_n-1)\left(u_n+\frac{1}{2}\right)}{u_n+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}}$$

et puisque:$0\le u_n\le 1$alors $u_{n+1}-u_n\ge 0$pour tout n de $\mathbb{N}$, donc la suite (u_n) est croissante

Déduction:

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente.

3) Montrons par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

- Initialisation: pour $n=0$ on a: $u_0=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{2^2}$ donc la propriété est vraie pour $n=0$
- Hérédité: Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que: $u_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$ et montrons que $u_{n+1}=\cos\frac{\pi}{2^{n+3}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

on a: $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\right)}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}$

(car $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$) et puisque $0 \leq \frac{\pi}{2^{n+3}} \leq \frac{\pi}{2}$; alors $u_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)$.

Donc: $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

• Conclusion: On a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2^{n+2}} = 0$ et la fonction cos est continue en 0

donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \cos 0 = 1$

VII Suites (u_n) de type $u_{n+1} = f(u_n)$

• Monotonie (cas où f est croissante)

- Si: $u_{n_0} < u_{n_0+1}$; alors par récurrence, on montre que:

$$(\forall n \geqslant n_0)\ ;\ u_n < u_{n_0+1}\ ;$$

donc: $(u_n)_{n\in I}$ est croissante.

- Si: $u_{n_0} > u_{n_0+1}$; alors par récurrence on montre que: $(\forall n \geqslant n_0)\ ;\ u_n > u_{n+1}$;

donc: $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante.

• Limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$

- Si f est continue sur un intervalle J
- $f(J) \subset J$
- $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente
- $u_{n+1} = f(u_n)\ ;\ n \geqslant n_0$
- $u_{n_0} \in J$

Alors: La limite de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Exercices d'application

Exercice 23

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x) = \frac{9x}{x^3+6}$

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle:

For more visit: L9ray.com CamScanner

$I = [0; \sqrt[3]{3}[$ et que : $f(I) = I$.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq \sqrt[3]{3}$

3) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente, et calculer sa limite.

Exercice 24

Soit α un élément de l'intervalle $]0; 1[$

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 \in [0; \sqrt{\alpha}] \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!}$

a) Soit k un élement de $\mathbb{N}$, tel que : $k \geq 2$

Vérifier que : $k! \geq 2^{k-1}$, en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n < 3\sqrt{\alpha}$

b) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

Exercice 25

On considère la suite numérique (x_n) définie par:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} = x_n + 1 - \sqrt{1 + x_n^2} \end{cases}$$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < x_n < 1$.

2) Montrer que la suite (x_n) est décroissante.

3) Déduire que la suite (x_n) est convergente et calculer la limite.

(On peut considèrer la fonction: $f: x \mapsto x + 1 - \sqrt{1 + x^2}$.)

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 23

1) • Montrons que la fonction f est stictement croissante sur $I=[0;\sqrt[3]{3}]$:

La fonction f est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I); f'(x) = 9.\frac{x^3+6-3x^3}{(x^3+6)^2} = \frac{18(3-x^3)}{(x^3+6)^2}$$

et puisque: $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, alors : $0 \leq x^3 \leq 3$, c'est-à-dire : $3-x^3 \geq 0$

donc : $(\forall x \in I); f'(x) \geq 0$ et f s'annule au point $x=\sqrt[3]{3}$.

D'où f est strictement croissante sur I.

• Montrons que $f(I)=I$

la fonction f est continue et strictement croissante sur $I=[0;\sqrt[3]{3}[$,

donc $f(I)=\left[f(0);f(\sqrt[3]{3})\right]=[0;\sqrt[3]{3}]=I$

2) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < \sqrt[3]{3}$.

• Initialisation:

Pour $n=0$, on a : $u_0=1$ et $1 \leq 1 < \sqrt[3]{3}$, donc : $1 \leq u_0 < \sqrt[3]{3}$

• Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que : $1 \leq u_n < \sqrt[3]{3}$, et montrons que: $1 \leq u_n < \sqrt[3]{3}$

on a f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;\sqrt[3]{3}]$

donc : $1 \leq u_n \leq \sqrt[3]{3} \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt[3]{3})$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{9}{7} \leq u_{n+1} \leq \sqrt[3]{3}$$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < \sqrt[3]{3}$

3) Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n} \times \frac{9u_n}{u_n^3+6} = \frac{9}{u_n^3+6}$

et puisque : $1 \leq u_n < \sqrt[3]{3}$ alors : $0 < u_n^3 + 6 < 9$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

donc : $\frac{1}{u_n^3+6} > \frac{1}{9}$ d'où : $\frac{9}{u_n^3+6} > 1$

on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et $u_n > 0$; alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > u_n$

Par conséquent la suite (u_n) est strictement croissante.

4) • Déduction :

La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par $\sqrt[3]{3}$, donc elle est convergente.

• Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

On a : • f est continue sur $I = [0; \sqrt[3]{3}[$ • $f(I) \subset I$

• $u_0 \in I$ et $(\forall n \in IN) ; u_{n+1} = f(u_n)$

et puisque la suite (u_n) est convergente , alors sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$ sur I .

Soit $x \in I$, on a : $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{9x}{x^3+6} = x$

$\Leftrightarrow x(x^3 - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 = 3 \; ou \; x = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3} \; ou \; x = 0$

On a: $(\forall n \in IN) ; u_n \geq 1$ donc: $\lim u_n \geq 1$, d'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt[3]{3}$

Exercice 25

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$

• Initialisation: Pour $n = 0$, on a : $u_0 \in [0; \sqrt{\alpha}]$ (d'après les données)

donc : $0 \leq u_0 \leq \sqrt{\alpha}$

• Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que : $0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$, et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{\alpha}$

on a : $u_n \geq 0$ et $\alpha > 0$, donc : $u_n + \alpha > 0$ et $u_n + 1 > 0$

d'où : $\frac{u_n + \alpha}{u_n + 1} > 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \geq 0$ (1)

For more visit: L9ray.com CamScanner

• et on a : $u_{n+1} - \sqrt{\alpha} = \dfrac{u_n + \alpha}{u_n + 1} - \sqrt{\alpha}$

$= \dfrac{u_n + \alpha - u_n\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha}}{u_n + 1}$

$= \dfrac{u_n(1 - \sqrt{\alpha}) - \sqrt{\alpha}(1 - \sqrt{\alpha})}{1 + u_n} = \dfrac{(1 - \sqrt{\alpha})(u_n - \sqrt{\alpha})}{u_n + 1}$

et puisque : $0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$, alors : $u_n - \sqrt{\alpha} \leq 0$ et $u_n + 1 > 0$

et on a : $0 < \alpha < 1$, donc : $1 - \sqrt{\alpha} > 0$, d'où : $\dfrac{(1 - \sqrt{\alpha})(u_n - \sqrt{\alpha})}{u_n + 1} \leq 0$,

c'est-à-dire : $u_{n+1} - \sqrt{\alpha} \leq 0$, ainsi : $u_{n+1} \leq \sqrt{\alpha}$ (2)

en déduit que : $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{\alpha}$, ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$

b) Montrons que la suite (u_n) est convergente

• Étudions la monotonie de la suite (u_n):

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + \alpha}{u_n + 1} - u_n$

$= \dfrac{u_n + \alpha - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \dfrac{\alpha - u_n^2}{u_n + 1}$

et puisque : $0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$, alors : $\alpha - u_n^2 \geq 0$ et $u_n + 1 > 0$

donc : $\dfrac{\alpha - u_n^2}{u_n + 1} \geq 0$, d'où : $u_{n+1} \geq u_n$, par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \geq u_n$

Donc la suite (u_n) est croissante.

Puisque (u_n) est croissante, et majorée par $\sqrt{\alpha}$, alors elle est convergente.

* Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;\sqrt{\alpha}]$ par : $f(x) = \dfrac{x + \alpha}{x + 1}$

on a : * f est continue sur $[0;\sqrt{\alpha}]$

* $f([0;\sqrt{\alpha}]) \subset [0;\sqrt{\alpha}]$ (Remarquer que f est strictemnet croissante sur $[0;\sqrt{\alpha}]$ et $f([0;\sqrt{\alpha}]) = [\alpha;\sqrt{\alpha}]$)

* $u_0 \in [0;\sqrt{\alpha}]$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

et puisque (u_n) est convergente, alors sa limite est une solution de l'équation

For more visit: L9ray.com CamScanner

$f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;\sqrt{\alpha}]$.

Soit $x \in [0;\sqrt{\alpha}]$ on a : $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x+\alpha}{x+1} = x$

$\Leftrightarrow x + \alpha = x^2 + x$

$\Leftrightarrow x^2 = \alpha$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\alpha}$ (car $x \geqslant 0$)

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{\alpha}$

2) a) Soit k un élément de $\mathbb{N}$, tel que $k \geq 2$

* Vérifions que : $k! \geq 2^{k-1}$

On a : $\forall p \in \{2;3;4;...;k\}$; $p \geq 2$, donc : $\prod\limits_{p=2}^{k} p \geq \prod\limits_{p=2}^{k} 2$

et puisque : $\prod\limits_{p=2}^{k} p = 2 \times 3 \times ... \times k = 1 \times 2 \times ... \times k = k!$

et $\prod\limits_{p=2}^{k} 2 = \underbrace{2 \times 2 \times ... \times 2}_{(k-1)\ fois} = 2^{k-1}$, alors : $k! \geq 2^{k-1}$

* Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_n < 3\sqrt{\alpha}$

- Pour $n = 0$, on a : $v_0 = u_0$ et $u_0 = \sqrt{\alpha}$ et $\sqrt{\alpha} < 3\sqrt{\alpha}$, donc : $v_0 < 3\sqrt{\alpha}$

- Pour $n = 1$ on a : $v_1 = u_0 + u_1$ et $u_0 \leq \sqrt{\alpha}$ et $u_1 \leq \sqrt{\alpha}$

donc : $v_1 \leq 2\sqrt{\alpha}$, d'où : $v_1 < 3\sqrt{\alpha}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, tel que : $n \geqslant 2$

On a : $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{u_k}{k!} = u_0 + u_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{u_k}{k!}$

et on a : $\forall k \in \{2;3;...;n\}$; $k! \geq 2^{k-1}$, donc : $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$

et puisque : $0 \leq u_k \leq \sqrt{\alpha}$, alors : $\dfrac{u_k}{k!} \leq \dfrac{\sqrt{\alpha}}{2^{k-1}}$

d'où : $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{u_k}{k!} \leq \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\sqrt{\alpha}}{2^{k-1}}$

or : $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\sqrt{\alpha}}{2^{k-1}} = \sqrt{\alpha} \cdot \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{2^{k-1}} = \sqrt{\alpha} \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

$= \sqrt{\alpha}\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\alpha}\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

et puisque : $1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} < 1$, alors : $\sqrt{\alpha}\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) < \sqrt{\alpha}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

c'est-à-dire : $\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{\alpha}}{2^{k-1}} < \sqrt{\alpha}$, donc : $\sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{k!} < \sqrt{\alpha}$

d'où : $v_n < u_0 + u_1 + \sqrt{\alpha}$ et on a : $u_0 \leq \sqrt{\alpha}$ et $u_1 \leq \sqrt{\alpha}$, donc : $v_n < 3\sqrt{\alpha}$

par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n < 3\sqrt{\alpha}$

b) Déduction:

* Étudions la monotonie de la suite (v_n):

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} + \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} = \frac{u_{n+1}}{(n+1)!}$$

et puisque : $\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} \geq 0$, alors : $v_{n+1} - v_n \geq 0$, c'est-à-dire : $v_{n+1} \geq v_n$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n \leq v_{n+1}$ c'est-à-dire que la suite (v_n) est croissante

• La suite (v_n) est croissante, et majorée par $3\sqrt{\alpha}$, donc elle est convergente.

Exercice 25

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < x_n < 1$

• Initialisation: pour $n = 0$, on a: $x_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $0 < x_0 < 1$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < x_n < 1$ et montrons que: $0 < x_{n+1} < 1$

On a: $x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n + 1 + \sqrt{1 + x_n^2}}$

et puisque $x_n > 0$ alors $x_n + 1 + \sqrt{1 + x_n^2} > 0$, donc $x_{n+1} > 0$ (1)

et on a: $x_{n+1} - 1 = x_n - \sqrt{1 + x_n^2}$

$$= \frac{-1}{x_n + \sqrt{1 + x_n^2}}$$

et puisque $x_n > 0$, alors $x_n + \sqrt{1 + x_n^2} > 0$ donc $x_{n+1} - 1 < 0$ (2)

De (1) et (2) on déduit que $0 < x_{n+1} < 1$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < x_n < 1$

2) Montrons que la suite (x_n) est décroissante

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a: $x_{n+1} - x_n = 1 - \sqrt{1+x_n^2} = \dfrac{-x_n^2}{1+\sqrt{1+x_n^2}}$

et puisque $-x_n^2 < 0$ et $1 + \sqrt{1+x_n^2} > 0$ alors $x_{n+1} - x_n < 0$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_{n+1} < x_n$, par conséquent , la suite (x_n) est décroissante.

3) Déduction:

La suite (x_n) est décroissante , minorée par 0, donc elle est convergente

• Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0;1]$ par $f(x) = x + 1 - \sqrt{1+x^2}$

f est dérivable sur I et on a: $(\forall x \in I) ; f'(x) = \dfrac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$

on a: $(\forall x \in I) ; f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur l'intervalle I

est puisque f est continue sur I alors: $f(I) = [f(0); f(1)] = [0; 2-\sqrt{2}]$

on a: $f(I) \subset I$ (car $2-\sqrt{2} < 1$) d'où les conditions suivantes sont vérifiées

• $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; x_{n+1} = f(x_n)$

• f est continue sur l'intervalle I et $f(I) \subset I$

• La suite (x_n) est convergente

D'où la limite de la suite (x_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$ sur $I = [0;1]$

Soit $x \in I$ on a: $f(x) = x \iff \sqrt{1+x^2} = 1$

$\iff 1 + x^2 = 1$

$\iff x = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

VIII Suites adjacentes

Si $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ sont deux suites telles que:

(1) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante

For more visit: L9ray.com CamScanner

(2) $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

alors (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.

Les suites (u_n) et (v_n) vérifiant (1) et (2) sont dites adjacentes.

Exercices d'application

Exercice 26

On considère la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = \dfrac{7}{u_n + 6} \end{cases}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n > 0$

1) Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, puis y_{n+1} en fonction de y_n.

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n < 1 < y_n$;

b- Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que $(y_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

3- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; |1 - u_n| < \frac{1}{6^{n-1}}$

4- En déduire que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 27

On considère la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$

1) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

b- Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ et : $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{\sqrt{n}} = 2$

2) On considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = s_n - 2\sqrt{n}$

a- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n > -2$. Que peut-on conclure ?

3) On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = s_n - 2\sqrt{n+1}$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 28

Soit a et b deux nombres réels tels que: $a > b > 0$

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = a\,;\, b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad et \quad b_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ a_n > b_n > 0$

2) Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante et que la suite (b_n) est strictement croissante.

3) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\,; a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$

4) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5) En déduire que $(a_n \times b_n)_n$ est constante et en déduire la limite commune des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 29

Soit a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \ ;\ v_0 = b \\ (\forall n \in IN); u_{n+1} = \sqrt{u_n . v_n} \quad et \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; 0 < u_n < v_n$

2) Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 30

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 2 \leq u_n \leq 3$

2) Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n puis b_{n+1} en fonction de b_n

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < a_n < b_n$

b) Étudier la monotonie des suites (a_n) et (b_n)

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{25}(b_n - a_n)$

b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 31

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies par :

$(\forall n \geqslant 2)$; $u_n = 2^{n+1} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ et $v_n = 2^{n+1} \times \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

1) Montrer que (u_n) est strictement croissante et (v_n) strictement décroissante.

2) a) Montrer que : $(\forall n \geqslant 2)$; $u_n < v_n$

b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

3) En déduire que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont convergentes et calculer leurs limites.

Exercice 32

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x}$

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in IN) \ ; \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $x_n = u_{2n+1}$ et $y_n = x_{2n}$

1) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et que $f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$

2) a) Montrer par récurrence que la suite (x_n) est strictement croissante et que la suite (y_n) est strictement décroissante. (On montrera d'abord que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $fof(x_n) = u_{n+1}$ et $y_{n+1} = fof(y_n)$)

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n \leq y_n$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

4) a) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et calculer leur limite commune

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Solutions

Exercice 26

1) Exprimons x_{n+1} en fonction de x_n puis y_{n+1} en fonction de y_n :

Soit $n \in \mathbb{N}$; $x_{n+1} = u_{2n+2} = \frac{7}{u_{2n+1} + 6} = \frac{7}{\frac{7}{u_{2n} + 6} + 6} = \frac{7(u_{2n} + 6)}{7 + 6(u_{2n} + 6)}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_{n+1} = \frac{7x_n + 42}{6x_n + 43}$

On montre de même que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $y_{n+1} = \frac{7y_n + 42}{6y_n + 43}$

2) a- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $x_n < 1 < y_n$:

- Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $x_n < 1$
- Initialisation :

Pour $n = 1$, $x_1 = u_2 = \frac{7}{8}$ donc : $x_1 < 1$; la proposition est donc vraie au rang initial

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que: $x_n < 1$ et montrons que: $x_{n+1} < 1$

On a: $x_{n+1} - 1 = \frac{7x_n + 42}{6x_n + 43} - 1 = \frac{x_n - 1}{6x_n + 43}$

$0 < x_n < 1 \Rightarrow (x_n - 1 < 0 \text{ et } 6x_n + 43 > 0)$

$\Rightarrow x_{n+1} - 1 < 0$

Donc $x_{n+1} < 1$

Conclusion/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $x_n < 1$

On montre de même que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $y_n > 1$. donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $x_n < 1 < y_n$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b- Montrons par récurrence que $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

• Initialisation: Pour $n = 1$, on a : $x_1 = u_2 = \frac{7}{8}$ et $x_2 = \frac{385}{386}$, donc $x_2 \geq x_1$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que $x_{n+1} \geq x_n$,

montrons que : $x_{n+2} \geq x_{n+1}$

on a : $x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{7x_{n+1} + 42}{6x_{n+1} + 43} - \frac{7x_n + 42}{6x_n + 43} = \frac{49(x_{n+1} - x_n)}{(6x_{n+1} + 43)(6x_n + 43)}$

or $x_{n+1} - x_n \geq 0$; et $6x_{n+1} + 43 > 0$; $6x_n + 43 > 0$ donc : $x_{n+2} \geq x_{n+1}$

Conclusion : $(\forall x \in \mathbb{N}^*)$; $x_{n+1} \geq x_n$

Donc la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante. on montre de même que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

3) montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $|1 - u_n| < \frac{1}{6^{n-1}}$;

• Initialisation :

Pour $n = 2$ on a : $|1 - u_2| = \left|1 - \frac{7}{8}\right| = \frac{1}{8} < \frac{1}{6^{2-1}}$, donc la proposition est vraie au rang initial.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, supposons que : $|1 - u_n| < \frac{1}{6^{n-1}}$, et

montrons que : $|1 - u_{n+1}| < \frac{1}{6^n}$

on a : $|1 - u_{n+1}| = \left|1 - \frac{7}{u_n + 6}\right| = |1 - u_n| \times \frac{1}{u_n + 6}$

$u_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{u_n + 6} < \frac{1}{6}$

or, d'après l'hypothèse de récurrence : $|1 - u_n| < \frac{1}{6^{n-1}}$

d'où : $|1 - u_{n+1}| < \frac{1}{6^{n-1}} \times \frac{1}{6}$ c'est-à-dire : $|1 - u_{n+1}| < \frac{1}{6^n}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $|1 - u_n| < \frac{1}{6^{n-1}}$;

4) Déduisons que : $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; on a : $|1 - x_n| = |1 - u_{2n}|$ et $|1 - u_{2n}| < \frac{1}{6^{2n-1}}$

Donc : $|1 - x_n| < \frac{1}{6^{2n-1}}$, or : $-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6^{2n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n-1} = 0$

d'où : $\lim_{n \to +\infty} |1 - x_n| = 0$, et par suite : $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$ et on montre de même que :

$\lim_{n \to +\infty} y_n = 1$ donc : $\lim_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = 0$

On a : * La suite (x_n) est croissante ; * La suite (y_n) est décroissante ;

* $\lim_{x \to +\infty} (x_n - y_n) = 0$

Donc les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 27

1) a) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sqrt{n-1} < \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$

Donc : $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

D'où : $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$

c'est-à-dire : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

b- Montrons que $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_n}{\sqrt{n}} = 2$

• On a : $s_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$

D'après 1) a- on a : $\sum_{p=1}^{p=n} 2(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) < \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}} < \sum_{p=1}^{p=n} 2(\sqrt{p} - \sqrt{p-1})$

Donc : $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) < \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{0})$;

d'où : $(\forall n \in IN^*) ; s_n > 2(\sqrt{n+1} - 1)$

or : $\lim_{n \to +\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$ et $s_n > 2(\sqrt{n+1} - 1)$ donc : $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$

* D'après l'inégalité précédente , on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2(\sqrt{n+1} - 1) < s_n < 2\sqrt{n}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $2\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<\frac{s_n}{\sqrt{n}}<2$

or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$

et comme : $2\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<\frac{s_n}{\sqrt{n}}<2$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{s_n}{\sqrt{n}}=2$

2) a- Montrons que (u_n) est décroissante :.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $u_n=s_n-2\sqrt{n}$ donc : $u_{n+1}=s_{n+1}-2\sqrt{n+1}$.

d'où : $u_{n+1}-u_n=s_{n+1}-s_n-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}$

$$=\sum_{p=1}^{p=n+1}\frac{1}{\sqrt{p}}-\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{\sqrt{p}}+2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

d'après la question1) a - on a : $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

donc : $\frac{1}{\sqrt{n+1}}+2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)<0$

d'où : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $u_{n+1}-u_n<0$, et par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante.

b- Montrons que $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n>-2$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $u_n=s_n-2\sqrt{n}$ et d'après le résultat précédent ;

$$s_n>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

Donc : $u_n>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)-2\sqrt{n}$ d'où : $u_n>2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-2$

c'est-à-dire : $u_n+2>2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

or : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>0$, donc : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $u_n+2>0$

• Déduction :

Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par -2 , alors elle est convergente.

3) Montrons que $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ sont adjacentes

For more visit: L9ray.com CamScanner

* La suite (u_n) est décroissante. (1)

* Montrons que $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $v_{n+1} - v_n = \left(s_{n+1} - 2\sqrt{n+2}\right) - \left(s_n - 2\sqrt{n+1}\right)$

$$= s_{n+1} - s_n - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right)$$

D'après la question 1) a- on a : $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right) > 0$, d'où : $v_{n+1} - v_n > 0$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ v_{n+1} > v_n$. La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est donc strictement croissante. (2)

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n - v_n = s_n - 2\sqrt{n} - s_n + 2\sqrt{n+1}$

$$= 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ (3)

De : (1) ; (2) et (3) , on déduit que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 28

1) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > b_n > 0$:

* On peut montrer facilement, par récurrence, que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $a_n > 0$ et $b_n > 0$;

• Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n > b_n$

Initialisation : pour $n = 0$, on a : $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et $a > b$, donc : $a_0 > b_0$

La proposition est donc vraie au rang initial.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$;

Supposons que : $a_n > b_n$ et montrons que $a_{n+1} > b_{n+1}$

On a : $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

or : $a_n > 0$; $b_n > 0$ et d'après l'hypothèse de récurrence : $a_n > b_n$,

donc $a_n \neq b_n$

d'où : $a_{n+1} - b_{n+1} > 0$ c'est-à-dire : $a_{n+1} > b_{n+1}$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n > b_n > 0$

2)Montrons que (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$

Puisque : $b_n - a_n < 0$ alors $a_{n+1} < a_n$

• On a : $b_{n+1} - b_n = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} - b_n = \frac{a_n b_n - b_n^2}{a_n + b_n} = \frac{b_n(a_n - b_n)}{a_n + b_n}$

Puisque : $a_n > b_n > 0$, alors $b_{n+1} - b_n > 0$, donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $a_{n+1} < a_n$ et $b_{n+1} > b_n$

Donc (a_n) est strictement décroissante et (b_n) est strictement croissante.

3) Montrons que : $a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$:

Méthode 1: Soit $n \in \mathbb{N}$;

Déterminons le signe de $2(a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n)$

on a : $2(a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) = a_n + b_n - \frac{4a_n b_n}{a_n + b_n} - a_n + b_n$

$$= 2b_n - \frac{4a_n b_n}{a_n + b_n}$$

$$= \frac{2a_n b_n + 2b_n^2 - 4a_n b_n}{a_n + b_n}$$

$$= \frac{2b_n(b_n - a_n)}{a_n + b_n}$$

Puisque $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $b_n - a_n < 0$ alors : $2(a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) < 0$

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Méthode 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)\left(\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}\right)$

Puisque : $a_n > 0$; $b_n > 0$ et $a_n > b_n$; alors : $0 < \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} < 1$

Donc : $0 < \frac{1}{2}(a_n - b_n)\left(\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}\right) < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$

4) Déduisons que (a_n) et (b_n) sont adjacentes:

on a : $\begin{cases} 0 < a_n - b_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}) \\ 0 < a_{n-1} - b_{n-1} < \frac{1}{2}(a_{n-2} - b_{n-2}) \\ \vdots \\ 0 < a_1 - b_1 < \frac{1}{2}(a_0 - b_0) \end{cases}$

En multipliant , membre à membre ces doubles inégalités strictement positives , et après simplification, on obtient : : $0 < a_n - b_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - b_0)$

on a : $-1 < \frac{1}{2} < 1$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$

En résumant les résultats précédents, on a :

- La suite (a_n) est strictement décroissante
- La suite (b_n) est strictement croissante
- $\lim(a_n - b_n) = 0$

Donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5) Montrons que la suite $(a_n \times b_n)_n$ est constante

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_{n+1} \times b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \times \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n \times b_n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n$; d'où la suite $(a_n \times b_n)_n$ est constante

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n b_n = ab$

- Déduisons la limite de (a_n) et (b_n)

For more visit: L9ray.com CamScanner

Puisque les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, alors elles ont une même limite ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_n) = l \times l = ab$

donc : $l^2 = ab$, et puisque : $l \geq 0$ car $a_n > 0$, alors : $l = \sqrt{ab}$,

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{ab}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Exercice 29

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < v_n$:

Initialisation : • Pour $n = 0$, on a : $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et puisque $0 < a < b$,

alors : $0 < u_0 < v_0$

• Hérédité ; soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $0 < u_n < v_n$,

montrons que : $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$

On a : $0 < u_n < v_n$, donc $\sqrt{u_n.v_n} > 0$ et $\frac{u_n + v_n}{2} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$

et $v_{n+1} > 0$

on a : $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n.v_n}$

$= \frac{1}{2}\left(u_n + v_n - 2\sqrt{u_n.v_n}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2$

Puisque : $0 < u_n < v_n$, alors : $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} < 0$, donc : $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} \neq 0$,

d'où : $\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2 > 0$ Ainsi : $v_{n+1} > u_{n+1} > 0$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < v_n$

2) • Étudions la monotonie de (u_n):

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n.v_n} - u_n = \frac{u_n.v_n - u_n^2}{\sqrt{u_n.v_n} + u_n} = \frac{u_n(v_n - u_n)}{\sqrt{u_n.v_n} + u_n}$

Puisque : $0 < u_n < v_n$, alors : $v_n - u_n > 0$ et $\sqrt{u_n.v_n} + u_n > 0$

Donc : $\frac{u_n(v_n - u_n)}{\sqrt{u_n v_n} + u_n} > 0$, et par conséquent : $u_{n+1} - u_n > 0$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

• Étudions la monotonie de la suite (v_n):

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n$

$= \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2}$

Puisque : $0 < u_n < v_n$ alors : $u_n - v_n < 0$ donc : $v_{n+1} - v_n < 0$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} < v_n$. La suite (v_n) est donc strictement décroissante.

3) Montrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes

• Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2$

or : $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} = \frac{v_n - u_n}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}$ donc : $\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2 = (v_n - u_n) \times \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}$

et puisque , $0 < \sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} < \sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}$, alors : $\frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < 1$

Donc : $(v_n - u_n) \times \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < v_n - u_n$ (car : $v_n - u_n > 0$) ,

d'où $\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2 < v_n - u_n$

Donc : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

Conclusion : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 0 < v_{k+1} - u_{k+1} < \frac{1}{2}(v_k - u_k)$

en remplaçant k successivement par : $\begin{cases} 0 < v_1 - u_1 < \frac{1}{2}(v_0 - u_0) \\ 0 < v_2 - u_2 < \frac{1}{2}(v_1 - u_1) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 < v_n - u_n < \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1}) \end{cases}$

0 ; 1 ; 2 ; ... ; $(n-1)$, on obtient :

Par produit membre à membre ces doubles inégalité strictement positives et après simplification on obtient :

$$0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$

Puisque : $-1 < \frac{1}{2} < 1$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) = 0$

d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$ (d'après un critère de convergence)

For more visit: L9ray.com CamScanner

on a alors : • (u_n) est croissante. • (v_n) est décroissante. • $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 30

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 \leqslant u_n \leqslant 3$

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$ et $2 \leq 2 \leq 3$ donc $2 \leq u_0 \leq 3$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

Supposons que : $2 \leq u_n \leq 3$ et montrons que : $2 \leq u_{n+1} \leq 3$

On a : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{7}{3} \leq 2 + \frac{1}{u_n} \leq \frac{5}{2}$ donc $2 \leq 2 + \frac{1}{u_n} \leq 3$,

d'où : $2 \leq u_{n+1} \leq 3$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 \leqslant u_n \leqslant 3$

2) • Exprimons a_{n+1} en fonction de a_n

Soit $n \in \mathbb{N}$,

On a : $a_{n+1} = u_{2n+2} = 2 + \frac{1}{u_{2n+1}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{u_{2n}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{a_n}} = \frac{5a_n + 2}{2a_n + 1}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_{n+1} = \frac{5a_n + 2}{2a_n + 1}$

• Exprimons b_{n+1} en fonction de b_n

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a : $b_{n+1} = u_{2n+3} = 2 + \frac{1}{u_{2n+2}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{u_{2n+1}}}$

$$b_{n+1} = 2 + \frac{2}{2 + \frac{1}{b_n}} = 2 + \frac{b_n}{2b_n + 1} = \frac{5b_n + 2}{2b_n + 1}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_{n+1} = \frac{5b_n + 2}{2b_n + 1}$

3) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < a_n < b_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a : $a_n > 0$ (car $u_{2n} \geq 2$ donc $u_{2n} > 0$), donc: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n > 0$

Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n < b_n$

• Initialisation : Pour $n = 0$; on a : $b_0 = \frac{5}{2}$ et $a_0 = 2$ donc : $a_0 < b_0$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; Suppose que : $a_n < b_n$ et montrons que : $a_{n+1} < b_{n+1}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{5b_n + 2}{2b_n + 1} - \dfrac{5a_n + 2}{2a_n + 1}$

$$= \frac{(5b_n + 2)(2a_n + 1) - (5a_n + 2)(2b_n + 1)}{(2b_n + 1)(2a_n + 1)}$$

$$= \frac{10a_n b_n + 5b_n + 4a_n + 2 - 10a_n b_n - 5a_n - 4b_n - 2}{(2b_n + 1)(2a_n + 1)}$$

$$= \frac{b_n - a_n}{(2b_n + 1)(2a_n + 1)}$$

• On a: $a_n > 0$ et $b_n > 0$ donc $(2b_n + 1)(2a_n + 1) > 0$, et d'après l'hypothèse de récurrence, $a_n < b_n$ d'où : $b_n - a_n > 0$

Ainsi : $b_{n+1} > a_{n+1}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n < b_n$

b) Étudions la monotonie de la suite (a_n) en utilisant le raisonnement par récurrence

• Initialisation : Pour $n = 0$;

On a : $a_0 = 2$ et $a_1 = u_2 = 2 + \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{12}{5}$ donc $a_0 < a_1$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$;

Supposons que $a_n < a_{n+1}$, et montrons que $a_{n+1} < a_{n+2}$

On a : $a_{n+2} - a_{n+1} = \dfrac{5a_{n+1} + 2}{2a_{n+1} + 1} - \dfrac{5a_n + 2}{2a_n + 1}$

$$= \frac{(5a_{n+1} + 2)(2a_n + 1) - (5a_n + 2)(2a_{n+1} + 2)}{(2a_{n+1} + 1)(2a_n + 1)}$$

$$= \frac{10a_n a_{n+1} + 5a_{n+1} + 4a_n + 2 - 10a_n a_{n+1} - 5a_n - 4a_{n+1} - 2}{(2a_{n+1} + 1)(2a_n + 1)}$$

$$= \frac{a_{n+1} - a_n}{(2a_{n+1} + 1)(2a_n + 1)}$$

Puisque $2a_n + 1 > 0$ et $2a_{n+1} + 1 > 0$ et $a_{n+1} - a_n > 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence); alors $a_{n+2} > a_{n+1}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n < a_{n+1}$; donc la suite (a_n) est strictement croissante

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Étudions le monotonie de la suite (b_n) en utilisant le raisonnement par récurrence

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a: $b_0 = u_1 = \frac{5}{2}$ et $b_1 = u_3 = \frac{29}{12}$

donc: $b_1 < b_0$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que: $b_{n+1} < b_n$ et montrons que:

$b_{n+2} < b_{n+1}$

On a: $b_{n+2} - b_{n+1} = \frac{5b_{n+1}+2}{2b_{n+1}+1} - \frac{5b_n+2}{2b_n+1} = \frac{b_{n+1}-b_n}{(2b_{n+1}+1)(2b_n+1)}$

Puisque : $2b_n + 1 > 0$ et $2b_{n+1} + 1 > 0$ et $b_{n+1} - b_n < 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence) alors $b_{n+2} - b_{n+1} < 0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_{n+1} < b_n$ d'où la suite (b_n) est strictement décroissante.

4) a) Démontrons l'inégalité demandée

Soit $n \in \mathbb{N}$; On a : $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{(2b_n+1)(2a_n+1)}$

$= \frac{1}{(2b_n+1)(2a_n+1)}(b_n - a_n)$

Or: $u_n \geq 2$, $a_n \geq 2$ et $b_n \geq 2$ alors : $(2a_n + 1)(2b_n + 1) \geq 25$

Donc : $\frac{1}{(2a_n + 1)(2b_n + 1)} \leq \frac{1}{25}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{25}(b_n - a_n)$ (car $b_n - a_n > 0$)

b) Déduisons que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes

On a : (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante; reste à montrer que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$

D'après les résultats précédents, on a: $(\forall p \in \mathbb{N})$; $0 < b_{p+1} - a_{p+1} \leq \frac{1}{25}(b_p - a_p)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\begin{cases} 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{25}(b_{n-1} - a_{n-1}) \\ 0 < b_{n-1} - a_{n-1} \leq \frac{1}{25}(b_{n-2} - a_{n-2}) \\ \vdots \\ 0 < b_1 - a_1 \leq \frac{1}{25}(b_0 - a_0) \end{cases}$

Par produit membre à membre ces doubles inégalités strictrement positives et après simplification, on obtient : $0 < b_n - a_n \leq \left(\frac{1}{25}\right)^n (b_0 - a_0)$

Or : $\begin{cases} b_0 - a_0 = \frac{1}{2}, \text{ donc } (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 0 < b_n - a_n \leq \left(\frac{1}{25}\right)^n \times \frac{1}{2} \\ b_n - a_n > 0 \end{cases}$

On a : $\lim\left(\frac{1}{25}\right)^n \times \frac{1}{2} = 0$ (car $-1 < \frac{1}{25} < 1$) donc : $\lim_{n \to +\infty}(b_n - a_n) = 0$

Les trois conditions sont vérifiées, donc : les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

• Déterminons la limite commune ℓ de ces deux suites.

On a : $a_{n+1} = \frac{5a_n + 2}{2a_n + 1}$; $\lim a_n = \ell$; donc : $\lim \frac{2a_n + 2}{2a_n + 1} = \frac{5\ell + 2}{2\ell + 1}$

Or $\lim a_{n+1} = \ell$, donc, d'après l'unicité de la limite $\ell = \frac{5\ell + 2}{2\ell + 1}$

On a : $\ell = \frac{5\ell + 2}{2\ell + 1} \Longleftrightarrow \ell = 1 + \sqrt{2}$ ou $\ell = 1 - \sqrt{2}$ or $\ell \geq 2$ donc : $\ell = 1 + \sqrt{2}$

d'où: a: $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 1 + \sqrt{2}$.

Exercice 31

1) • Montrons que (u_n) est strictement croissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que : $n \geq 2$

On a : $u_n = 2^{n+1} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

$= 2^{n+1} \times \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

$= 2^{n+1} \times 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

$= 2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $u_{n+1} = 2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

Donc : $u_{n+1} - u_n = 2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

$= 2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)$

Or : $0 < \frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2}$ donc : $0 < \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1$ et $0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1$

D'où : $1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) > 0$ et par suite $2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right) > 0$

Donc : $(\forall n \geq 2) : u_{n+1} > u_n$; et par conséquent la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante

• Montrons que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$;

On a : $0 < \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2}$, donc $\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) > 0$ et $2^{n-1} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) > 0$; d'où $v_n > 0$

On a : $v_n = 2^{n+1} \times \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

$= 2^{n+1} \times \tan\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

$= 2^{n+1} \times \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+2} \times \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{v_{n+1}}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$

D'où : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

et comme : $1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1$, alors : $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$; donc $v_{n+1} < v_n$; (car $v_n > 0$)

D'où : $(\forall n \geq 2); v_{n+1} < v_n$; la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est donc strictement décroissante

2) a) Montrons que : $(\forall n \geq 2); u_n < v_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$; on a : $v_n = 2^{n+1} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{u_n}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$

Puisque : $0 < \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2}$, alors : $0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < 1$

Donc : $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} > 1$, d'où : $\frac{u_n}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} > u_n$ (car $u_n > 0$)

Donc : $(\forall n \geq 2); u_n < v_n$

b) Montrons que : $\lim_{n \to +\infty}(u_n - v_n) = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$

On a : $u_n - v_n = 2^{n+1} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 2^{n+1} \times \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

$= 2^{n+1} \times \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 1\right)$

$= 2\pi \times \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 1\right)$

Puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{2^n} = 0$ et la fonction cos est continue en 0, alors :

$\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \cos(0) = 1$ donc : $\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 1 = 0$

• On considère la fonction φ définie par : $\begin{cases} \varphi(x) = \frac{\tan x}{x} ; x \neq 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$

On a : $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$, donc la fonction φ continue en 0.

et puisque : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{2^n} = 0$ alors : $\lim_{n \to +\infty} \varphi\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \varphi(0) = 1$

c'est-à-dire : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} = 1$

Donc: $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$

3) • Déduisons que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont convergentes

On a :

• La suite (u_n) est strictement croissante.

• La suite (v_n) est strictement décroissante.

• $\lim_{n \to +\infty}(u_n - v_n) = 0$

Donc les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes donc convergentes et convergent vers la même limite.

• Déterminons $\lim_{n \to +\infty} u_n$

On a : $(\forall n \geq 2) ; v_n = 2\pi \times \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} = 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = 2\pi$

D'où : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 2\pi$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 32

1) Montrons que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

• La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in [0; +\infty[) \; ; \; f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[) \; ; \; f'(x) < 0$, et par conséquent f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

• Montrons que : $f([0; +\infty[\subset [0; +\infty[)$

Puisque f est continue et strictement décroissantes sur $[0; +\infty[$

alors : $f([0; +\infty[) = \left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x); f(0)\right] =]0; 1]$

Or : $]0; 1] \subset [0; +\infty[$, donc : $f([0; +\infty[\subset [0; +\infty[)$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = f(u_{2(n+1)})$

$$= f(u_{(2n+1)+1}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(x_n))$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; x_{n+1} = fof(x_n)$

On montre de même que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; y_{n+1} = fof(y_n)$

Et puisque f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

et $f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$ alors la fonction fof est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

a) • Montrons par récurrence que (x_n) est strictement croissante

• Initialisation : Pour $n = 0$

On a : $x_0 = u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2}$ et $x_1 = f(x_0) = fof\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5}$ et $\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$

Donc : $x_0 < x_1$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

On suppose que $x_n < x_{n+1}$. Montrons que $x_{n+1} < x_{n+2}$

Puisque $(x_n; x_{n+1}) \in ([0; +\infty[)^2$ et fof est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

alors : $x_n < x_{n+1} \Longrightarrow fof(x_n) < fof(x_{n+1})$

$$\Longrightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n < x_{n+1}$, donc la suite (x_n) est strictement croissante.

Montrons par récurrence que la suite (y_n) est strictement décroissante.

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$y_0 = u_0 = 1$ et $y_1 = fof(1) = \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3} < 1$, donc $y_1 < y_0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $y_{n+1} < y_n$.

Montrons que : $y_{n+2} < y_{n+1}$

Puisque : $(y_n; y_{n+1}) \in ([0; +\infty[)^2$ et fof est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

alors : $y_{n+1} < y_n \Longrightarrow fof(y_{n+1}) < fof(y_n)$

$\Longrightarrow y_{n+2} < y_{n+1}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} < y_n$, donc la suite (y_n) est strictement décroissante.

b) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n < y_n$

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $x_0 = \frac{1}{2}$; $y_0 = 1$ et $\frac{1}{2} < 1$, donc $x_0 < y_0$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

On suppose que : $x_n < y_n$. Montrons que : $x_{n+1} < y_{n+1}$

On a : $(x_n; y_n) \in ([0; +\infty[)^2$ et fof est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Donc : $x_n < y_n \Longrightarrow fof(x_n) < fof(y_n)$

$\Longrightarrow x_{n+1} < y_{n+1}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n < y_n$

3) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $\frac{1}{2} \leq 1 \leq 1$, donc : $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On suppose que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$. Montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$,

For more visit: L9ray.com CamScanner

alors : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}$

et comme : $\frac{2}{3} \leq 1$, alors : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

• Conclusion : d'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$

$$= \frac{1}{1+u_n} - \frac{1}{1+u_{n-1}}$$

$$= \frac{u_{n-1} - u_n}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}$$

Donc : $|u_{n+1} - u_n| = \left|\frac{u_{n-1} - u_n}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}\right| = \frac{|u_n - u_{n-1}|}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}$

Or : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et $\frac{1}{2} \leq u_{n-1} \leq 1$

Donc : $\frac{3}{2} \leq 1 + u_n \leq 2$ et $\frac{3}{2} \leq 1 + u_{n-1} \leq 2$

D'où : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+u_{n-1}} \leq \frac{2}{3}$

Par produit membre à membre, on obtient : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{(1+u_n)(1+u_{n-1})} \leq \frac{4}{9}$

En multipliant de part et d'autre par $|u_n - u_{n-1}|$ on obtient :

$|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)|u_n - u_{n-1}|$

On a : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $|u_{k+1} - u_k| \leq \frac{4}{9}|u_k - u_{k-1}|$

En remplaçant k successivement par : $1;2;3;\cdots;n$ on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} 0 < |u_2 - u_1| \leq \left(\frac{4}{9}\right)|u_1 - u_0| \\ 0 < |u_3 - u_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)|u_2 - u_1| \\ \vdots \\ 0 < |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)|u_n - u_{n-1}| \end{cases}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Par produit membre à membre, et après simplification, on obtient :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_1 - u_0|$$

Or : $|u_1 - u_0| = \frac{1}{2}$ donc: $\left(\frac{4}{9}\right)^n |u_1 - u_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

4) a) • Montrons que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et calculons leur limite commune puis calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

Donc : $|u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{2n}$. Soit : $|x_n - y_n| \leq \left(\frac{16}{81}\right)^n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $|x_n - y_n| \leq \left(\frac{16}{81}\right)^n$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{16}{81}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{16}{81} < 1$); donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = 0$

On a : • La suite (x_n) est croissante

• La suite (y_n) est décroissante

• $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = 0$

Donc : Les suites (x_n) et (y_x) sont adjacentes, par suite elles convergent vers la même limite ℓ

• Déterminons ℓ :

On a : • La fonction fof est continue sur $[0; +\infty[$

- $fof([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$
- $x_0 \in [0; +\infty[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_{n+1} = fof(x_n)$

et puisque la suite (x_n) est convergente, alors sa limite ℓ est une solution de l'équation $fof(x) = x$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $x \in [0;+\infty[$ on a : $fof(x) = f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{x+1}{x+2}$

Donc : $fof(x) = x \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} = x$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

et puisque : $\ell \geq 0$ alors : $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

b) • Montrons que la suite (u_n) est convergente et calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

c'est-à-dire : $(\forall \varepsilon > 0);(\exists N \in \mathbb{N});(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Soit $\varepsilon > 0$; $(\exists N_1 \in \mathbb{N});(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ n \geq N_1 \Longrightarrow |u_{2n} - \ell| < \varepsilon$

et $(\exists N_2 \in \mathbb{N});(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ n \geq N_2 \Longrightarrow |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$

En prenant $N = \max(2N_1; 2N_2 + 1)$ on obtient : $(\forall \varepsilon > 0);(\exists N \in \mathbb{N})$

$(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Exercices de synthèses

Exercice 33

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \geq 1$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 2 \leq u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$ (1)

et $2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$ (2)

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) En déduire que la suite (u_n) est divergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n^2} \leq 1 - \frac{1}{u_n^2}$

b) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{u_n} = 1$

Exercice 34

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$ et $u_0 = 1$

1) Calculer u_1 et u_2 , et montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n$

2) Montrer que $(\forall x \in [0; +\infty[)$; $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$

3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\sqrt{n} \leq u_n$

b- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq n + \frac{1}{2^n}$

c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \leq \sqrt{2n}$

En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$

4) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = u_n - \sqrt{n}$; montrer que (v_n) est convergente.

Exercice 35

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right) - \frac{1}{6n^6}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^3\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 \leq n^4$

2) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 36

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $0 < \alpha < 1$

On considère les suites (a_n) et (S_n) définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n = (1-\alpha)^n \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

1) Montrer que les suites (a_n) et (S_n) sont convergentes puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 > 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$

a -Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$ et que (u_n) est une suite strictement croissante.

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$

c - En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 37

1- Soit (u_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

Montrer que (u_n) est convergente en déterminant sa limite.

2- On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$

où $a \in \mathbb{R}$, tel que $a \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Montrer que la suite (v_n) est convergente.

3) a- Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $x \neq \frac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$

Vérifier que : $\tan x = \operatorname{cotan} x - 2\operatorname{cotan}(2x)$

b- On considère la suite (w_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^p} \tan\left(\frac{\theta}{2^p}\right)$

où $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$:

Exercice 38

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^3 + nx - 1$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}$ et que : $0 < x_n < 1$

2) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante, et en déduire qu'elle est convergente.

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < x_n < \frac{1}{n}$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 39

Pour tout entier naturel n , on considère la fontion f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1$$

1) a- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n sur $[0;1]$.

b- Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ selon les valeurs de x.

c- En déduire que (α_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{-1}{2n+2} \leq \alpha_n \leq \frac{1}{n+1}$

b- En déduire $\lim \alpha_n$

Exercice 40

On considère la fonction polynôme P_n définie sur $\mathbb{R}$ par:

$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1$ tel que $(n \in \mathbb{N}^*)$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n sur l'intervalle $[0;1]$.

2) a- Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) ; P_{n+1}(x) > P_n(x)$

b- En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante

3) a-Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

Montrer que: $P_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2$

b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2\alpha_n - (\alpha_n)^{n+1} - 1 = 0$

c- Déterminer α_2 et vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} ; \alpha_n < \alpha_2$, et en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n)^n = 0$

d- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 41

I) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_2 et u_3

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

a) $u_n \geq n$ b) $u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$

II) Soit (α_n) et (β_n) les suites définies par : $\alpha_n = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$ et $\beta_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n+1}}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n < \beta_n$ et $0 < \beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$ (utiliser I)2) b))

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n+2}}$ (utiliser I) 2) b))

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$

c) En déduire la monotonie de chacune des suites (α_n) et (β_n).

3) a) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes.

b) Calculer la limite de chacune des suites (α_n) et (β_n).

Exercice 42

On considère les suites numériques (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 ; a_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}) \ ; \ a_n = n a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = b_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}) \ ; \ b_n = n b_{n-1} + b_{n-2} \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} = (-1)^n$

b) Montrer que la suite (b_n) est croissante et que $b_n > (n+1) b_{n-2}$ pour tout de $\mathbb{N}$, tel que $n \geq 3$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}$ et $v_n = \frac{a_{2n}}{b_{2n}}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < u_n - v_n < \frac{2}{(n+1)!}$

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 43

Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre réel.

On pose $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

1) Montrer que : $\left(\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\ell\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to+\infty}(x_n)=\ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty}(y_n)=\ell\right)$

2) Soit (v_n) une suite numérique décroissante ayant pour limite 0

a) On suppose que : $u_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes. Que peut-on déduire?

b) Montrer que la suite numérique (a_n) définie par : $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ est convergente.

Exercice 44

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=a$ et $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{1-2u_n^2}$ pour tou

n de $\mathbb{N}$; où a est un nombre réel de l'intervalle $\left]0,\frac{1}{4}\right[$

1) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0<u_n<\frac{1}{4}$ et que la suite (u_n) est décroissan

b) Montrer que (u_n) est convergente et que : $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

2) On considère la suite (S_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ s_n=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k u_k$

et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n=S_{2n}$ et $w_n=S_{2n+1}$.

a) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Soit ℓ la limite commune de (v_n) et (w_n)

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}\leq\frac{2}{7}u_n$

c) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |s_n-v_n|\leq a\sum_{k=n+1}^{k=2n}\left(\frac{2}{7}\right)^k$

d) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty}s_n=l$ (Remarquer que : $|s_n-l|\leqslant|s_n-v_n|+|v_n-l|$)

Exercice 45

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases}u_0\in\mathbb{R}\\(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}=u_n-u_n^2\end{cases}$

I) 1) Déterminer la nature de la suite (u_n) dans chacun des cas: $u_0=0$

et $u_0=1$

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

b) Montrer que si la suite (u_n) est convergente alors $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

c) Montrer que si $u_0 < 0$ ou $u_0 > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

II) On suppose que : $u_0 \in]0;1[$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < 1$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente

2) Soit (s_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $s_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{u_k^2}{1+u_k}$

a) Vérifier que : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = u_0 - u_{n+1}$ en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = u_0$

b) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $0 < \frac{u_k^2}{1+u_k} < u_k^2$

c) Montrer que la suite (s_n) est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} > 1$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$

Exercice 46

Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = k$ et $u_{n+1} = k + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer u_1 et u_2 en fonction de k

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $k \le u_n \le k+1$

2) Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$

a) Calculer x_{n+1} en fonction de x_n puis calculer y_{n+1} en fonction de y_n

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n < y_n$ et $y_n = k + \frac{1}{x_n}$

c) Étudier la monotonie de chacune des suites (x_n) et (y_n)

d) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} - x_{n+1} \le \frac{y_n - x_n}{(1+k^2)^2}$

e) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes, et calculer leur limite commune

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 47

On considère la suite (α_n) telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; \alpha_{n+4} = \frac{1}{4}(\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3})$$

Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; a_n = \min(\alpha_n; \alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3})$

et $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; b_n = \max(\alpha_n; \alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3})$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; a_n \leq \alpha_{n+4}$, en déduire que la suite (a_n) est croissante.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; b_n \geq \alpha_{n+4}$, en déduire que la suite (b_n) est décroissante.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; a_0 \leq a_n \leq \alpha_n \leq b_n \leq b_0$

b) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes:

On pose : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b$.

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; \alpha_{n+4} \leq \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; \alpha_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$

c) En utilisant la dernière inégalité (pour les termes) $\alpha_{n+5}, \alpha_{n+6}, \alpha_{n+7}$ montrer que : $b \leq a$

5) Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

6) Montrer que $(\alpha_n)_n$ est une suite convergente et calculer sa limite.

Exercice 48

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_n > 0$ et $v_n > 0$ (1)

et $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_n < v_n$ (2)

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < v_n - u_n < \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$

b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) On suppose que : $u_0 = v_0 \cos\alpha$ où $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

b) En déduire que : $v_n = v_0 \times \frac{\sin\alpha}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ en fonction de v_0 et α.

En déduire que : $\left(\forall \alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $\sin\alpha \leq \alpha \leq \tan\alpha$

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans le cas où $v_0 = 2$ et $u_0 = 1$.

Solutions

Exercice 33

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 1$

Initialisation: Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$, et $1 \geqslant 1$ donc $u_0 \geqslant 1$

• Hérédité : Soit $n \in IN$; supposons que $u_n \geq 1$, et montrons que $u_{n+1} \geqslant 1$

On a : $u_n \geqslant 1$, et $\frac{1}{u_n} > 0$, donc $u_n + \frac{1}{u_n} > 1$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$,

par suite $u_{n+1} \geqslant 1$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 1$

b) Étudions la monotonie de (u_n)

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n}$, et puisque $u_n \geq 1$ alors $\frac{1}{u_n} > 0$,

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2) a) • Soit $n \in IN^*$, on a : $u_n^2 = \left(u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}\right)^2 = u_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2}$

donc $u_n^2 - u_{n-1}^2 = 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2}$, d'où $u_n^2 - u_{n-1}^2 > 2$;

d'autre part on a : $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et puisque $u_{n-1} \geq 1$ alors $u_{n-1}^2 \geq u_{n-1}$ d'où $\frac{1}{u_{n-1}^2} \leq \frac{1}{u_{n-1}}$

d'où : $2 + \frac{1}{u_{n-1}^2} \leq 2 + \frac{1}{u_{n-1}}$

et puisque $u_n^2 - u_{n-1}^2 = 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2}$ et $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1}}$

alors $u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$

par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; (1) $2 \leq u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$

on a : d'après (1) : $2 \leq u_k^2 - u_{k-1}^2 \leq 2 + u_k - u_{k-1}$

d'où : $\sum_{k=1}^{n} 2 \leq \sum_{k=1}^{n} (u_k^2 - u_{k-1}^2) \leq \sum_{k=1}^{n} 2 + \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1})$

d'où : $2n \leq u_n^2 - u_0^2 \leq 2n + u_n - u_0$

Par conséquent : $2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$, (car $u_0 = 1$)

Remarque $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$

$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$

b) Déduisons que la suite (u_n) est divergente :

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n^2 - 1 > 2n$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n \geq \sqrt{2n+1}$; cette inégalité est vraie pour $n = 0$ (car $u_0 = 1$),

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq \sqrt{2n+1}$ et puisque : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty$

alors : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, (d'après les critères de convergence), donc la suite (u_n) est divergente.

3) a) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n^2 - u_n \leq 2n \leq u_n^2 - 1$

et puisque : $(n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 1$, alors : $1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n^2} \leq 1 - \frac{1}{u_n^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $1-\frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n^2} \leq 1-\frac{1}{u_n^2}$

et puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u_n^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u_n}\right)=1$

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{u_n^2}=1$

et puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 1 , alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2n}{u_n^2}}=\sqrt{1}=1$

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n}}{u_n}=1$

Exercice 34

1) • $u_1=\sqrt{1+u_0}=\sqrt{2}$ • $u_2=\sqrt{2+u_1}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$

• Initialisation : pour $n=0$ on a : $u_0=1$ donc $u_0>0$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $u_n>0$, et montrons que $u_{n+1}>0$

on a : $u_n > 0 \Rightarrow n+1+u_n > 0$

$\Rightarrow \sqrt{n+1+u_n} > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > 0$

Conclusions : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$

2) Méthode 1 : On a : $(\forall a>0\ \forall b>0)$; $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$;

donc : $(\forall x \geq 0)$; $\sqrt{1\times x} \leq \frac{x+1}{2}$ d'où: $(\forall x \geq 0)$; $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$

Méthode 2 : $\frac{x+1}{2}-\sqrt{x}=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2}$

Méthode3 : $\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow (x+1) \geq 2\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 4x$

$\Leftrightarrow (x+1)^2-4x \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

Remarque : Si $b \geq 0$ et $a \geq 0$ alors : $a \leq b \Leftrightarrow a^n \leq b^n$

3) a- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq \sqrt{n}$:

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n-1} \geq 0 \Rightarrow n + U_{n-1} \geq n$

$\Rightarrow \sqrt{n + U_{n-1}} \geq \sqrt{n}$

$\Rightarrow U_n \geq \sqrt{n}$

La propriété est aussi vraie pour $n = 0$; donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \geq \sqrt{n}$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \leq n + \frac{1}{2^n}$;

- Initialisation :
- On a : $\left.\begin{matrix} U_0 = 1 \\ 0 + \frac{1}{2^0} = 1 \end{matrix}\right\}$ donc d'où la propriété est vraie pour $n = 0$
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $U_n \leq n + \frac{1}{2^n}$, et montrons que : $U_{n+1} \leq n + 1 + \frac{1}{2^{n+1}}$

On a : $U_n \leq n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow n + 1 + U_n \leq 2n + 1 + \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \sqrt{n+1+U_n} \leq \sqrt{2n+1+\frac{1}{2^n}}$ (car $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x+1)$)

donc : $U_n \leq n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow U_{n+1} \leq n + 1 + \frac{1}{2^{n+1}}$

- Conclusion $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \leq n + \frac{1}{2^n}$

c- On a : $U_n = \sqrt{n + U_{n-1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n-1} \leq n - 1 + \frac{1}{2^{n-1}}$

c'est-à-dire : $n + U_{n-1} \leq 2n - 1 + \frac{1}{2^{n-1}}$

on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2^{n-1} \geq 1 \Leftrightarrow (\forall n \in IN^*)$; $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 1$

Donc : $n + U_{n-1} \leq 2n$, d'où : $\sqrt{n + U_{n-1}} \leq \sqrt{2n}$

par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $U_n \leq \sqrt{2n}$

- Déduisons que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{\sqrt{n}} = 1$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $U_n \geq \sqrt{n}$ donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\frac{U_n}{\sqrt{n}} \geq 1$

On a : $U_n = \sqrt{n + U_{n-1}}$ et $U_{n-1} \leq \sqrt{2n-2}$, donc : $n + U_{n-1} \leq n + \sqrt{2n-2}$

c'est-à-dire : $\sqrt{n + U_{n-1}} \leq \sqrt{n + \sqrt{2n-2}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et on a : $\sqrt{n+U_{n-1}} \leq \sqrt{n+\sqrt{2n-2}} \Leftrightarrow U_n \leq \sqrt{n+\sqrt{2n-2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{U_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n+\sqrt{2n-2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}}$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1 \leq \frac{U_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}}$

on a : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \end{cases}$

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{\sqrt{n}} = 1$, d'après les critères de convergence

4) Montrons que la suite (V_n) est onvergente :

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $V_n = \sqrt{n+U_{n-1}} - \sqrt{n}$

$$= \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n+U_{n-1}}+\sqrt{n}}$$

et on a : $V_n = \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+U_{n-1}}+\sqrt{n}}$

$$= \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{U_{n-1}}{n}}+1}$$

et on a : $\frac{U_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \times \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{1-\frac{1}{n}} \times \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n-1}}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n-1}}{\sqrt{n}} = 1$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}} = 1$)

On a : $(\forall n \geq 1)$; $\sqrt{n-1} \leq U_{n-1} \leq \sqrt{2(n-1)}$

donc : $(\forall n \geq 1)$; $\frac{\sqrt{n-1}}{n} \leq \frac{U_{n-1}}{n} \leq \frac{\sqrt{2(n-1)}}{n}$

c'est-à-dire : $(\forall n \geq 1)$; $\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} \leq \frac{U_{n-1}}{n} \leq \sqrt{\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n-1}}{n}=0$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{U_{n-1}}{n}+1}}=\frac{1}{2}$

par conséquent : $\lim V_n=\frac{1}{2}$, donc la suite (v_n) est convergente.

Exercice 35

1) a) Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ ;\ x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par: $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\,;f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$

On a : f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$(\forall x\in\mathbb{R}^+)\,;\ :f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$

$f''(x)=-\sin(x)+x$

$f'''(x)=1-\cos x$

donc : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\,;f'''(x)\ge 0$

Dressons le tableau des variations de f'' ; f' et f .

x	0	$+\infty$
$f'''(x)$	+	
f''	0 →	
$f''(x)$	+	
f'	0 →	
$f'(x)$	+	
f	0 →	

d'après le tableau ci-dessus, on a : $f''(x)\ge 0$ et $f'(x)\ge 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

et $f(0)=0$ et $f'(0)=0$ donc : $\sin x-x+\frac{x^3}{6}\ge 0$

et $(\forall x\in IR^+)\ ;-\sin x+x\ge 0$

d'où : $(\forall x\in IR^+)\ ;\ x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) Déduction :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : d'après la question précédente (en prenant $x = \frac{k}{n^2}$)

$\forall k \in \{1;2;3;...;n\}$; $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3 \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3 \leq \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)$

d'où $\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \frac{1}{6n^6}\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$

c- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^{n} k^3 \leq n^4$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\begin{cases} 1^3 \leq n^3 \\ 2^3 \leq n^3 \\ . \\ . \\ n^3 \leq n^3 \end{cases}$

Par addition membre à membre on obtient : $1^3 + 2^3 + ... + n^3 \leq n.n^3$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1^3 + 2^3 + ... + n^3 \leq n^4$

2) Calculons $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq n^4 \Rightarrow -\frac{1}{6n^6}\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) \geq -\frac{1}{6n^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \frac{1}{6n^6}\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) \geq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \frac{1}{6n^2}$

donc : $\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$

et puisque : $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n}$

On a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{2}$

Donc : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ (d'après les critères de convergence)

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 36

1) Montrons que les suites (a_n) et (S_n) sont convergentes.

* On a : $0 < \alpha < 1$, donc : $0 < 1 - \alpha < 1$

d'où la suite (a_n) est convergente et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

* On a : $S_n = a_0 + a_1 + a_2 .... + a_n$ et (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 - \alpha$, et de premier terme $a_0 = 1$ donc : $S_n = \dfrac{1 - (1 - \alpha)^{n+1}}{1 - (1 - \alpha)}$

c'est-à-dire : $S_n = \dfrac{1 - (1 - \alpha)^{n+1}}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}[1 - (1 - \alpha)^{n+1}] = \dfrac{1}{\alpha}(1 - a_{n+1})$

et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1} = 0$ alors (S_n) est convergente et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{\alpha}$

2) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$, et que (u_n) est une suite strictement croissante

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 > 0$

• Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

on a : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$ et puisque $a_n = (1 - \alpha)^n$ et $1 - \alpha > 0$, alors $a_n > 0$

et on a : $u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$

• Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n}{u_n}$ et puisque : $a_n > 0$ et $u_n > 0$ alors :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leq u_0 + \dfrac{1}{\alpha u_0}$:

Méthode 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$, et (u_n) est croissante, donc:

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq u_0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{u_0}$, et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n > 0$, alors : $\frac{a_n}{u_n} < \frac{a_n}{u_0}$,

c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n < \frac{a_n}{u_0}$ ainsi : $\sum_{K=0}^{n-1}(u_{K+1} - u_K) \leq \sum_{K=0}^{n-1} \frac{a_K}{u_0}$, par conséquent :

$u_n - u_0 \leq \frac{S_{n-1}}{u_0} \leq \frac{S_n}{u_0}$

et puisque: $S_n = \frac{1}{\alpha} - \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha}$ alors : $S_n \leq \frac{1}{\alpha}$, donc : $u_n - u_0 \leq \frac{1}{\alpha u_0}$

c'est-à-dire : $u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$, d'où : $(\forall n \in IN)$; $u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$

Méthode 2 :

(u_n) est une suite strictement croissante , donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$,

$\frac{1}{u_{n-1}} < \frac{1}{u_0}$

et puisque : $a_n > 0$ alors : $\frac{a_{n-1}}{u_{n-1}} < \frac{a_{n-1}}{u_0}$, donc $u_n - u_{n-1} < \frac{a_{n-1}}{a_0}$

D'où : $u_n < u_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{a_0}$

Donc : $(\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $u_k < u_{k-1} + \frac{a_{k-1}}{a_0}$

- Pour $k = n$: $u_n < u_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{u_0}$
- Pour $k = n-1$: $u_{n-1} < u_{n-2} + \frac{a_{n-2}}{u_0}$
- Pour $k = n-2$: $u_{n-2} < u_{n-3} + \frac{a_{n-3}}{u_0}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

- Pour $k = 1$: $u_1 < u_0 + \frac{a_0}{u_0}$

Par addition membre à membre et après simplification, on obtient :

$u_n < u_0 + \frac{\sum_{1=0}^{n-1} a_k}{u_0}$

c'est-à-dire : $u_n < u_0 + \frac{S_{n-1}}{u_0}$ (2) donc : $u_n < u_0 + \frac{1}{u_0} \times \frac{1}{\alpha}[1 - (1-\alpha)^n]$

et puisque : $(1 - (1-\alpha)^n) < 1$, alors : $u_n < u_0 + \frac{1}{u_0} \times \frac{1}{\alpha}$

c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n < u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$.

c- Déduisons la convergence de la suite (u_n) :

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $u_n < u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$, donc la suite (u_n) est majorée par $u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$, et comme (u_n) est croissante, alors elle est convergente.

Exercice 37

1- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \le k \le 2n+1 \iff n^2+1 \le n^2+k \le (n+1)^2$

$$\iff \sqrt{n^2+1} \le \sqrt{n^2+k} \le n+1$$

$$\iff \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

donc : $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1} \le u_n \le \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$; c'est-à-dire : $\frac{2n+1}{n+1} \le u_n \le \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{2n+1}{n+1} \le u_n \le \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ (d'après les critères de convergence)

2- Montrons que la suite (v_n) est convergente :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$

$$= \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et de premier terme $v_1 = \frac{1}{2}\sin a$.

par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}\sin a$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin a$$

et puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

3-a- Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $x \neq \frac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{cotan}(x) - 2\operatorname{cotan}(2x) &= \frac{\cos x}{\sin x} - 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \\ &= \frac{2\cos^2 x - 2\cos(2x)}{2\sin x \cos x} \\ &= \frac{2\sin^2 x}{2\cos x \sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x\end{aligned}$$

b- Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On a : $\frac{1}{2^p}\tan\left(\frac{\theta}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^p}\right) - \frac{1}{2^{p-1}}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^{p-1}}\right)$

On pose : $a_p = \frac{1}{2^p}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^p}\right)$, on a:

$$\begin{aligned}w_n &= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p}\tan\left(\frac{\theta}{2^p}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2^p}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^p}\right) - \frac{1}{2^{p-1}}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^{p-1}}\right)\right) + \tan\theta \\ &= \sum_{p=1}^{n}(a_p - a_{p-1}) + \tan\theta \\ &= \sum_{p=1}^{n} a_p - \sum_{p=0}^{n-1} a_p + \tan\theta = a_n - a_0 + \tan\theta\end{aligned}$$

et puisque : $a_n = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $a_0 = \operatorname{cotan}\theta$

alors : $$\begin{aligned}w_n &= \frac{1}{2^n}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - \operatorname{cotan}\theta + \tan\theta \\ &= \frac{1}{2^n}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - 2\operatorname{cotan}(2\theta)\end{aligned}$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; w_n = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - 2\operatorname{cotan}(2\theta)$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\frac{1}{2^n}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}\right)$

et puisque : $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}\frac{\theta}{2^n} = 0$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty}\frac{\frac{\theta}{2^n}}{\tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = 1$

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \frac{1}{\theta} - 2\operatorname{cotan}(2\theta)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 38

1) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}$.

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car fonction polynôme)

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'_n(x) = 3x^2 + n$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'_n(x) > 0$ et par conséquent la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où : f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f_n(\mathbb{R})$; avec $f_n(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f_n(x); \lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right[$

or : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, donc : $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

et puisque : $0 \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique réel x_n de $\mathbb{R}$ tel que $f_n(x_n) = 0$

. Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! x_n \in \mathbb{R}); f_n(x_n) = 0$

* Montrons que : $0 < x_n < 1$

on a : $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n$ donc : $f_n(0) < 0 < f_n(1)$

d'où : $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$ et puisque f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

alors : $0 < x_n < 1$

2) Montrons que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in]0;1[$

On a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x^3 + (n+1)x - 1) - (x^3 + nx - 1) = x$

Donc : $\forall x \in]0;1[$; $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

or : $x_n \in]0;1[$, donc : $f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n)$; d'où : $f_{n+1}(x_n) > 0$ (car $f_n(x_n) = 0$)

et puisque : $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ alors : $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$, d'où $x_n > x_{n+1}$

car f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); x_{n+1} < x_n$

et par conséquent la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

• Déduction

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < x_n < \frac{1}{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_n > 0$ et : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$, donc : $0 < f_n\left(\frac{1}{n}\right)$

d'où : $f_n(x_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, car : $(0 = f_n(x_n))$

et puisque f_n est strictement croissante , alors : $x_n < \frac{1}{n}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < x_n < \frac{1}{n}$

* Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < x_n < \frac{1}{n}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc , d'après un critère de convergence , $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Exercice 39

1) a- Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique.

• La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (car fonction polynôme)

• $f_n(1) = 2n + 2$ et $f_n(0) = -1$; donc $f_n(1) \times f_n(0) < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ admet au moins une solution α_n dans $[0;1]$.

- La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car fonction polynôme) ,

et $(\forall x \in \mathbb{R}); f'_n(x) = 6x^2 - 2x + 2(n+1)$

$= 2(3x^2 - x + 1) + 2n$

Le discriminant de $3x^2 - x + 1$ est $\Delta = -11$, donc $(\forall x \in \mathbb{R}); 3x^2 - x + 1 > 0$ (car $a > 0$)

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'_n(x) > 0$ et par suite f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc : $(\exists! \alpha_n \in]0;1[)\ f_n(\alpha_n) = 0$

b- Déterminons le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (2x^3 - x^2 + 2(n+2)x - 1) - (2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1) = 2x$

Donc : $(\forall x \geq 0); f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ et $(\forall x \leq 0); f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

c) Déduisons que (α_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$;

on a : $\alpha_n \in]0;1[$, donc : $f_{n+1}(\alpha_n) > f_n(\alpha_n)$ (car $\forall x \in]0;+\infty[\quad f_{n+1}(x) > f_n(x)$)

or : $f_n(\alpha_n) = 0$, donc : $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$

et puisque : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, alors : $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

et puisque : f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$

Donc la suite (α_n) est strictement décroissante .

De plus : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < \alpha_n < 1$, donc la suite (α_n) est minorée par 0, d'où la suite (α_n) est convergente.

2) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \dfrac{-1}{2n+2} \leqslant \alpha_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 2\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^3 - \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2 + 2 - 1$

$$= \frac{2}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+1)^2} + 1$$

$$= \frac{2 - (n+1) + (n+1)^3}{(n+1)^3}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n + 2}{(n+1)^3}$$

Donc : $f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right) > 0$

D'autre part : $f_n\left(\dfrac{-1}{2n+2}\right) = \dfrac{-2}{8(n+1)^3} - \dfrac{1}{(2n+2)^2} - 2$

Donc : $f_n\left(\dfrac{-1}{2n+2}\right) < 0$ et puisque : $f_n(\alpha_n) = 0$,

alors : $f_n\left(\dfrac{-1}{2n+2}\right) < f_n(\alpha_n) < f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

Donc $\dfrac{-1}{2n+2} < \alpha_n < \dfrac{1}{n+1}$ (car f_n est strictement croissante)

b) Déduisons $\lim \alpha_n$

on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{2n+2} = 0$ Donc : $\lim \alpha_n = 0$ (D'après un critère de convergence)

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 40

1) Montrons que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n

• P_n est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0;1]$

- Si $n = 1$, alors $P_1(x) = x - 1$; donc l'équation $P_1(x) = 0$ admet une unique solution qui est: $\alpha_1 = 1$

- Si $n \geq 2$, alors $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = n - 1$

Donc $P_n(1) \times P_n(0) < 0$ (car $n \geq 2 \Leftrightarrow n - 1 > 0$)

On a : La fonction P_n est continue sur $[0;1]$ et $P_n(0) \times P_n(1) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) ; l'équation $P_n(x) = 0$ admet au moins une solution α_n dans $[0;1]$: $(\exists \alpha_n \in]0;1[) \; ; \; P_n(\alpha_n) = 0$

• Unicité de α_n

La fonction P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particuler sur $[0;1]$; on a : $(\forall x \in [0;1]) ; P'_n(x) > 0$, donc P_n est strictement croissante sur $[0;1]$, et par suite : $(\exists ! \alpha_n \in]0;1[) \; ; \; P_n(\alpha_n) = 0$.

2) a- Montrons que $\forall x \in]0;+\infty[\; ; P_{n+1}(x) > P_n(x)$

Soit $x \in]0;+\infty[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$;

On a :

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = (x^{n+1} + x^n + ... + x - 1) - (x^n + x^{n-1} + ... + x - 1) = x^{n+1}$$

on a : $x > 0$ donc : $x^{n+1} > 0$ et par suite : $P_{n+1}(x) > P_n(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

b- Déduisons que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante

on a : $(\forall x \in]0;+\infty[) \; ; \; P_{n+1}(x) > P_n(x)$

et puisque: $P_n(\alpha_n) = 0$, alors : $P_{n+1}(\alpha_n) > 0$

or : $P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, donc: $P_{n+1}(\alpha_n) > P_{n+1}(\alpha_{n+1})$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et puisque la fonction P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n > \alpha_{n+1}$ et par suite : $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

3) a- Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} ; P_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$;

on a : $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$

$= (x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1) - 2$

$= \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{N}^*) ; (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) ; P_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2$

b) Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2\alpha_n - (\alpha_n)^{n+1} - 1 = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $P_n(\alpha_n) = 0 \Rightarrow \dfrac{1 - \alpha_n^{n+1}}{1 - \alpha_n} - 2 = 0$

$\Rightarrow 1 - \alpha_n^{n+1} - 2(1 - \alpha_n) = 0$

$\Rightarrow 2\alpha_n - \alpha_n^{n+1} - 1 = 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2\alpha_n + (\alpha_n)^{n+1} - 1 = 0$

c-• Déterminons α_2 et vérifions que $\alpha_n \leqslant \alpha_2$

α_2 est l'unique solution de l'équation $P_2(x) = 0$ sur $[0;1]$ avec $P_2(x) = x^2 + x - 1$

Le discriminant de $x^2 + x - 1$ est : $\Delta = 5$, donc ses racines sont :

$x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$0 < \alpha_2 < 1$, donc : $\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$; (car $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$)

Puisque la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante, alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; \alpha_n \leqslant \alpha_2$

Déduisons $\lim (\alpha_n)^n$

on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; 0 < (\alpha_n)^n \leqslant (\alpha_2)^n$

or $0 < \alpha_2 < 1$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_2)^n = 0$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n)^n = 0$

d- Montrons que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente

La suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Calculons sa limite

on a : $2\alpha_n - \alpha_n^{n+1} - 1 = 0$ donc : $\alpha_n(2 - \alpha_n^n) = 1$ d'où : $\alpha_n = \frac{1}{2 - \alpha_n^n}$ (car $2 - (\alpha_n^n) \neq 0$)

or : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n)^n = 0$ donc : $\lim \alpha_n = \frac{1}{2}$

Exercice 41

I) 1) Calculons u_2 et u_3

On a : $u_2 = u_1 + u_0 = 2$ et $u_3 = u_2 + u_1 = 3$

2) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geqslant n$

• Initialisation : L'inégalité $u_n \geq n$ est vraie pour $n = 0$ (pour $n = 1$ et pour $n = 2$)

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $u_n \geqslant n$ et $u_{n+1} \geqslant n + 1$ et montrons que $u_{n+2} \geqslant n + 2$

On a : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$; $u_n \geqslant n$ et $u_{n+1} \geqslant n + 1$

Donc : $u_{n+2} \geq (n + 1) + n$ c'est-à-dire : $u_{n+2} \geq 2n + 1$

et on a : $(2n + 1) - (n + 2) = n - 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n - 1 \geq 0$ c'est-à-dire $2n + 1 \geq n + 2$; d'où : $u_{n+2} \geq n + 2$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq n$

b) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 \times u_2 + (-1)^{0+1} = 1$ et $(u_1)^2 = 1$

Donc : $u_2 \times u_0 + (-1)^1 = (u_1)^2$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que la propriété est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$

On a : $u_{n+1} \times u_{n+3} + (-1)^{n+2} = u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2}) + (-1)^{n+2}$

$= (u_{n+1})^2 + u_{n+1} \times u_{n+2} + (-1)^{n+2}$

et puisque : $u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = u_{n+1}^2$

alors : $u_{n+1} \times u_{n+3} + (-1)^{n+2} = u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} + u_{n+1} \times u_{n+2} + (-1)^{n+2}$

$= u_{n+2}(u_n + u_{n+1}) + (-1)^{n+1}(1 + (-1))$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$= u_{n+2}u_{n+2}$ (car $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$)

Donc : $u_{n+1} \times u_{n+3} + (-1)^{n+2} = (u_{n+2})^2$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$

II- 1) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}} - \dfrac{u_{2n-1}}{u_{2n}} = \dfrac{(u_{2n})^2 - u_{2n-1} \times u_{2n+1}}{u_{2n} \times u_{2n+1}}$

et d'après I) 1) b) on a : $u_{2n-1} \times u_{2n+1} = u_{2n}^2 - (-1)^{2n} = (u_{2n})^2 - 1$

Donc : $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{(u_{2n})^2 - (u_{2n})^2 + 1}{u_{2n} \times u_{2n+1}} = \dfrac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}}$

b) Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\alpha_n < \beta_n$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < \beta_n - \alpha_n < \dfrac{1}{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}}$ et $u_{2n} \geq 2n$ et $u_{2n+1} \geq 2n + 1$

Donc : $\beta_n - \alpha_n > 0$ d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n < \beta_n$

• Déduisons que: $0 < \beta_n - \alpha_n < \dfrac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\beta_n - \alpha_n > 0$ et $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}}$

et puisque : $u_{2n} \geq 2n$ et $u_{2n+1} \geq 2n + 1$ alors : $u_{2n} \times u_{2n+1} \geq 4n^2 + 2n > n$

Donc : $\dfrac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}} < \dfrac{1}{n}$ d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < \beta_n - \alpha_n < \dfrac{1}{n}$

2) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n}u_{n+2}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} - \dfrac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$

$$= \frac{u_{2n+1} \times u_{2n} - u_{2n+2} \times u_{2n-1}}{u_{2n+2} \times u_{2n}}$$

$$= \frac{(u_{2n} + u_{2n-1})u_{2n} - u_{2n-1}(u_{2n} + u_{2n+1})}{u_{2n+2}u_{2n}}$$

$$= \frac{u_{2n}^2 + u_{2n-1}u_{2n} - u_{2n-1} \times u_{2n} - u_{2n-1}u_{2n+1}}{u_{2n+2}u_{2n}} = \frac{u_{2n}^2 - u_{2n-1}u_{2n+1}}{u_{2n+2}u_{2n}}$$

et puisque : $u_{2n-1} \times u_{2n+1} = u_{2n}^2 - (-1)^{2n}$

alors : $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{u_{2n}^2 - (u_{2n}^2 - (-1)^{2n})}{u_{2n+2}u_{2n}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n+2}u_{2n}}$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\alpha_n + 1 = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} + 1 = \frac{u_{2n-1} + u_{2n}}{u_{2n}} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{1}{\beta_n}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$

c) Déduisons la monotonie de chacune des suites (α_n) et (β_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n+2}u_{2n}}$

et puisque $u_{2n+2} \times u_{2n} > 0$ (car $u_{2n} \geq 2n$ et $u_{2n+2} \geq 2n + 2$ et $n > 0$)

alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_{n+1} - \alpha_n > 0$ donc la suite (α_n) est strictement croissante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\frac{1}{\beta_n} = 1 + \alpha_n$ donc $\beta_n = \frac{1}{1 + \alpha_n}$

et puisque: (α_n) est strictement croissante alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_{n+1} > \alpha_n$

Donc : $\alpha_{n+1} + 1 > \alpha_n + 1$ d'où : $\frac{1}{\alpha_{n+1} + 1} < \frac{1}{\alpha_n + 1}$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\beta_{n+1} < \beta_n$ donc la suite (β_n) est strictement décroissante.

3) a) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes

On a : (α_n) est strictement croissante et (β_n) et strictement décroissant (1)

et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < \beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$ (2)

de (1) et (2) on déduit que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes.

b) Déterminons la limite de chacune des suites (α_n) et (β_n) :

Puisque les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes, alors il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = \ell$ et $\ell > 0$ (car $\alpha_n > 0$ et $\beta_n > 0$) et puisque $\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$

alors $\ell = \frac{1}{\ell} - 1$

Donc : $\ell^2 + \ell - 1 = 0$ d'où : $\ell = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (vérifie ce résultat)

Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 42

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1} = (-1)^n$

• Initialisation : Pour $n = 1$, on a : $a_0 b_1 - a_1 b_0 = (-1) = (-1)^1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que : $a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1} = (-1)^n$ et montrons que: $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = (-1)^{n+1}$

On a : $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = a_n((n+1)b_n + b_{n-1}) - ((n+1)a_n + a_{n-1})b_n$

$= (n+1)a_n b_n + a_n b_{n-1} - (n+1)a_n b_n - a_{n-1} b_n$

$= a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n$

$= -(a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1})$

$= -(-1)^n = (-1)^{n+1}$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1} = (-1)^n$

b) • Montrons que la suite (b_n) est croissante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $b_{n+1} - b_n = (n+1)b_n + b_{n-1} - b_n$

$= nb_n + b_{n-1}$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $b_n > 0$

• Initialisation : Pour $n = 1$, on a : $b_1 = b_0 = 1$, donc $b_1 > 0$ (et $b_0 > 0$)

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que : $b_n > 0$ et $b_{n-1} > 0$ et montrons que $b_{n+1} > 0$

On a : $\begin{cases} b_{n-1} > 0 \\ b_n > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} nb_n > 0 \\ b_{n-1} > 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow nb_n + b_{n-1} > 0$

$\Longrightarrow b_{n+1} > 0$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_n > 0$ par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $b_{n+1} - b_n > 0$ donc la suite (b_n) est croissante

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}; n \geq 3)$; $b_n \geq (n+1)b_{n-2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$; tel que $n \geq 3$ on a : $b_{n-1} > b_{n-2} \Longrightarrow nb_{n-1} > nb_{n-2}$

$$\Longrightarrow nb_{n-1} + b_{n-2} > nb_{n-2} + b_{n-2}$$

$$\Longrightarrow b_n > (n+1)b_{n-2}$$

2) a) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n - v_n = \frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} - \frac{a_{2n}}{b_{2n}}$

$$= \frac{a_{2n-1}b_{2n} - a_{2n}b_{2n-1}}{b_{2n-1}b_{2n}}$$

$$= \frac{(-1)^{2n}}{b_{2n-1}b_{2n}} \text{ d'après 1) a)}$$

$$= \frac{1}{b_{2n-1}b_{2n}}$$

Donc : $u_n - v_n > 0$ (1)

• Montrons que : $u_n - v_n < \frac{2}{(n+1)!}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \geq 3$ d'après 1) b); on a : $b_n > (n+1)b_{n-2}$

Donc : $b_n b_{n-1} > (n+1)b_{n-1}b_{n-2}$ d'où $0 < \frac{1}{b_n b_{n-1}} < \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{b_{n-1}b_{n-2}}$

En remplaçant successivement :

$$\begin{cases} 0 < \frac{1}{b_3 b_2} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{b_2 b_1} \\ 0 < \frac{1}{b_4 b_3} < \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{b_3 b_2} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ 0 < \frac{1}{b_n b_{n-1}} < \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{b_{n-1}b_{n-2}} \end{cases}$$

Par produit membre à membre les inégalités précédentes, et après simplification on obtient : $\frac{1}{b_n b_{n-1}} < \frac{1}{b_1 \times b_2 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (n+1)}$

c'est-à-dire : $\frac{1}{b_n . b_{n-1}} < \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (n+1)}$

Donc : $\frac{1}{b_n . b_{n-1}} < \frac{2}{(n+1)!}$

Or (b_n) est croissante et strictement positive donc $b_n b_{n-1} < b_{2n} b_{2n-1}$

D'où : $\frac{1}{b_{2n} . b_{2n-1}} < \frac{1}{b_n . b_{n-1}}$

Ainsi : $\frac{1}{b_{2n} . b_{2n-1}} < \frac{2}{(n+1)!}$ par suite : $u_n - v_n < \frac{2}{(n+1)!}$ (2)

de (1) et (2) on déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < u_n - v_n < \frac{2}{(n+1)!}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

(Vérifier par calcul que $u_1 - v_1 < 1$ et $0 < u_2 - v_2 < \frac{1}{3}$)

b) d'après a) on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < u_n - v_n < \frac{2}{(n+1)!}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{(n+1)!} = 0$

Donc : $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ (d'après les critères de convergence)

$\left(0 < \frac{2}{(n+1)!} \leq \frac{2}{n+1}\right)$

Il reste à montrer que (v_n) est croissante et (u_n) est décroissante

• Montrons que (u_n) est décroissante :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} - \frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}$

$$= \frac{a_{2n+1}.b_{2n-1} - a_{2n-1}.b_{2n+1}}{b_{2n+1}.b_{2n-1}}$$

$$= \frac{((2n+1)a_{2n} + a_{2n-1})b_{2n-1} - a_{2n-1}((2n+1)b_{2n} + b_{2n-1})}{b_{2n+1}.b_{2n-1}}$$

$$= \frac{(2n+1)(a_{2n}.b_{2n-1} - a_{2n-1}.b_{2n})}{b_{2n+1}.b_{2n-1}}$$

$$= \frac{(2n+1)(-(-1)^{2n})}{b_{2n+1}.b_{2n-1}} \text{ ; d'après 1) a)}$$

$$= \frac{-(2n+1)}{b_{2n+1}.b_{2n-1}}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} - u_n < 0$ ainsi la suite (u_n) est décroissante.

• Montrons que (v_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - v_n = \frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}} - \frac{a_{2n}}{b_{2n}}$

$$= \frac{a_{2n+2} - b_{2n} - a_{2n}.b_{2n+2}}{b_{2n}.b_{2n+2}}$$

$$= \frac{((2n+2)a_{2n+1} + a_{2n}) - a_{2n}((2n+2)b_{2n+1} + b_{2n})}{b_{2n}.b_{2n+2}}$$

$$= \frac{(2n+2)(a_{2n+1}.b_{2n} - a_{2n}.b_{2n+1})}{b_{2n}.b_{2n+2}}$$

$$= \frac{(2n+2)((-1)^{2n})}{b_{2n+1}.b_{2n-1}} = \frac{2n+2}{b_{2n}.b_{2n+2}}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_{n+1} - v_n > 0$, ainsi la suite (v_n) est croissante.

Conclusion : on a : • (u_n) est décroissante; • (v_n) est croissante;

• $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 43

1) Montrons que : $(\lim u_n = \ell) \Longleftrightarrow (\lim x_n = \ell \text{ et } \lim y_n = \ell)$

On a : $(\lim u_n = \ell) \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0);(\exists N \in \mathbb{N})\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \geq N \Longrightarrow 2n \geq N$

$\Longrightarrow |u_{2n} - \ell| < \varepsilon$

$\Longrightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon$

Donc : $(\forall \varepsilon > 0);(\exists N \in \mathbb{N})\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon$ d'où : $\lim x_n = \ell$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $n \geq N \Longrightarrow 2n + 1 \geq N$

$\Longrightarrow |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$

$\Longrightarrow |y_n - \ell| < \varepsilon$

Donc : $(\forall \varepsilon > 0);(\exists N \in \mathbb{N})\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ n \geqslant N \Longrightarrow |y_n - \ell| < \varepsilon$ d'où : $\lim y_n = \ell$.

Par conséquent : $(\lim u_n = \ell) \Longrightarrow (\lim x_n = \ell \text{ et } \lim y_n = \ell)$

Réciproquement : supposons que $\lim (x_n) = \ell$ et $\lim (y_n) = \ell$ et montrons que $\lim (u_n) = \ell$

On a : $\lim x_n = \ell \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ n \geq N_1 \Longrightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon$

et $\lim y_n = \ell \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N})\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ n \geq N_2 \Longrightarrow |y_n - \ell| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$; on pose : $N = \max(2N_1; 2N_2 + 1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geqslant N$

Si n est pair alors : $(\exists p \in \mathbb{N})\ ;\ n = 2p$

On a : $n \geq N \Longrightarrow 2p \geq N$

$\Longrightarrow 2p \geq 2N_1$ (car $N \geqslant 2N_1$)

$\Longrightarrow p \geq N_1$

$\Longrightarrow |x_p - \ell| < \varepsilon$ (car $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n) = \ell$)

$\Longrightarrow |u_{2p} - \ell| < \varepsilon$

$\Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

Si n est impair, alors : $(\exists p \in \mathbb{N})\ ;\ n = 2p + 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $n \geq N \Longrightarrow 2p+1 \geq N$

$\Longrightarrow 2p+1 \geq 2N_2+1$ (car $N \geqslant 2N_2+1$)

$\Longrightarrow p \geq N_2$

$\Longrightarrow |y_p - \ell| < \varepsilon$

$\Longrightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon$

$\Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que : $n \geqslant N$ on a : $|u_n - \ell| < \varepsilon$

Par suite :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = \max(2N_1; 2N_2+1)) \in IN ; (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

ainsi : $\lim u_n = \ell$ d'où : $(\lim x_n = \ell$ et $\lim y_n = \ell) \Longrightarrow (\lim u_n = \ell)$

Conclusion : $(\lim u_n = \ell) \Longleftrightarrow (\lim x_n = \ell$ et $\lim (y_n) = \ell)$

2) a) • Soit $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$x_{n+1} - x_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \left(\sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k v_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k v_k\right)$$
$$= (-1)^{2n+1} v_{2n+1} + (-1)^{2n+2} v_{2n+2} = v_{2n+2} - v_{2n+1}$$

puisque (v_n) est décroissante alors $v_{2n+2} - v_{2n+1} \leqslant 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ x_{n+1} - x_n \leqslant 0$ donc la suite (x_n) est décroissante. (1)

• Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $y_{n+1} - y_n = u_{2n+3} - u_{2n+1}$

$$= \left(\sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k v_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k v_k\right)$$
$$= (-1)^{2n+2} v_{2n+2} + (-1)^{2n+3} v_{2n+3}$$
$$= v_{2n+2} - v_{2n+3}$$

puisque (v_n) est décroissante alors $v_{2n+2} - v_{2n+3} \geqslant 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ y_{n+1} - y_n \geqslant 0$ donc la suite (y_n) est croissante. (2)

• Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $x_n - y_n = \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k v_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k v_k\right)$

$$= -(-1)^{2n+1} v_{2n+1}$$
$$= v_{2n+1}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(v_{2n+1}) = 0$ (3)

de (1), (2) et (3) on déduit que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et admettent la même limite ℓ. On en déduit que la suite (u_n) est convergente et $\lim u_n = \ell$.

b) On pose : $v_n = \dfrac{1}{n!}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$

$= \dfrac{-n}{(n+1)!}$

On a : $\dfrac{-n}{(n+1)!} \leq 0$ donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} - v_n \leq 0$ d'où (v_n) est décroissante

D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n!) = +\infty$ (car : $n! \geq n$)donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$

Par conséquent la suite (v_n) est décroissante et ayant pour limite 0

Et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k v_k$ alors (et d'après 2) a) la suite (a_n) est convergente.

Exercice 44

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \dfrac{1}{4}$

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = a$ et $0 < a < \dfrac{1}{4}$

Donc : $0 < u_0 < \dfrac{1}{4}$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que : $0 < u_n < \dfrac{1}{4}$ et montrons que $0 < u_{n+1} < \dfrac{1}{4}$

On a : $0 < u_n < \dfrac{1}{4} \Rightarrow 0 < u_n^2 < \dfrac{1}{16}$

$\Rightarrow 0 < 2u_n^2 < \dfrac{1}{8}$

$\Rightarrow 1 > 1 - 2u_n^2 > \dfrac{7}{8}$

$\Rightarrow 1 < \dfrac{1}{1-2u_n^2} < \dfrac{8}{7}$

On a : $0 < \dfrac{1}{1-2u_n^2} < \dfrac{8}{7}$ et $0 < u_n^2 < \dfrac{1}{16}$ donc : $0 < \dfrac{u_n^2}{1-2u_n^2} < \dfrac{1}{14} < \dfrac{1}{4}$

D'où : $0 < u_{n+1} < \dfrac{1}{4}$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \frac{1}{4}$

• Montrons que (u_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{1 - 2u_n^2}$

et puisque $0 < \frac{1}{1 - 2u_n^2} < \frac{8}{7}$ alors : $0 < \frac{u_n}{1 - 2u_n^2} < \frac{2}{7}$ (car $0 < u_n < \frac{1}{4}$)

c'est-à-dire : $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{2}{7} < 1$

et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$ alors $0 < u_{n+1} < u_n$ donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} < u_n$

d'où (u_n) est décroissante.

b) Déduisons que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro, donc convergente.

• Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{x^2}{1 - 2x^2}$; f est dérivable sur $\left[0; \frac{1}{4}\right]$.

On a : • $f'(x) = \frac{2x}{(1 - 2x^2)^2}$, (donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$)

• f est continue sur I et $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(I) \subset I$ (car $f(I) = \left[0; \frac{1}{14}\right]$)

et puisque (u_n) est convergente alors sa limite ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$ sur I

On a : $f(\ell) = \ell \iff \frac{\ell^2}{1 - 2\ell^2} = \ell$

$\iff \ell^2 = \ell(1 - 2\ell^2)$

$\iff \ell(2\ell - 1)(\ell + 1) = 0$

La seule valeur de ℓ vérifiant cette équation et appartenant à $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ est 0

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$

2) a) Montrons que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes

On a : $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ et $v_n = s_{2n}$ et $w_n = s_{2n+1}$

et $v_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + u_{2n}$ et $w_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + u_{2n} - u_{2n+1}$

Étudions la monotonie de chacune des suites (v_n) et (w_n)

For more visit: L9ray.com CamScanner

• On a : $v_{n+1} - v_n = s_{2(n+1)} - s_{2n}$

$$= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k$$

$$= (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2}$$

$$= u_{2n+2} - u_{2n+1}$$

et puisque la suite (u_n) décroissante alors $u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} - v_n \leq 0$, d'où la suite (v_n) est décroissante. (1)

• On a : $w_{n+1} - w_1 = s_{2n+3} - s_{2n+1}$

$$= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k$$

$$= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3}$$

$$= u_{2n+2} - u_{2n+3}$$

et puisque la suite (u_n) est décroissante, alors $u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_{n+1} - w_n \geq 0$ d'où la suite (w_n) est croissante. (2)

• Calculons : $\lim\limits_{n \to +\infty} (w_n - v_n)$

On a : $w_n - v_n = s_{2n+1} - s_{2n}$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k$$

$$= (-1)^{2n+1} u_{2n+1}$$

$$= -u_{2n+1}$$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = 0$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (w_n - v_n) = 0$ (3)

de (1), (2) et (3), on déduit que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Soit ℓ la limite commune aux suites (v_n) et (w_n)

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_{n+1} < \frac{2}{7} u_n$

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{1 - 2u_n^2}$ et $0 < \frac{u_n}{1 - 2u_n^2} < \frac{2}{7}$ (d'après 1) a))

Donc : $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{2}{7}$ et puisque $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$

alors $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_{n+1} < \frac{2}{7} u_n$

c) Déduisons que : $|s_n - v_n| \leq a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7}\right)^k$

Soit $n \in \mathbb{N}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $|s_n - v_n| = \left|\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k u_k - s_{2n}\right| = \left|\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k u_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{k=2n}(-1)^k u_k\right|$

Donc : $|s_n - v_n| \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n}|(-1)^k u_k|$

D'où : $|s_n - v_n| \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k$ car $|(-1)^k| = 1$ et $(|u_k| = u_k)$ (car $u_k > 0$) (4)

et d'après 2) b) on a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} \leq \frac{2}{7}u_n$

Donc : $\begin{cases} 0 < u_n \leq \frac{2}{7}u_{n-1} \\ 0 < u_{n-1} \leq \frac{2}{7}u_{n-2} \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 < u_2 \leq \frac{2}{7}u_1 \\ 0 < u_1 \leq \frac{2}{7}u_0 \end{cases}$

Rappel : $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|a_k|$

Par produit membre à membre et après simplification on obtient $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{7}\right)^n u_0$

c'est-à-dire : $u_n \leq \left(\frac{2}{7}\right)^n a$ (car $u_0 = a$) donc $(\forall k \in \mathbb{N})\ ;\ u_k \leq \left(\frac{2}{7}\right)^k a$ (5)

de (4) et (5) on déduit que : $|s_n - v_n| \leq \sum_{k=n+1}^{k=2n}\left(\frac{2}{7}\right)^k a$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |s_n - v_n| \leq a\sum_{k=n+1}^{k=2n}\left(\frac{2}{7}\right)^k$

d) Déduisons que : $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$

On a : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ et $|s_n - \ell| \leq |s_n - v_n| + |v_n - \ell|$

et puisque : $|s_n - v_n| \leq a\sum_{k=n+1}^{k=2n}\left(\frac{2}{7}\right)^k$ alors $|s_n - l| \leq a\sum_{k=n+1}^{k=2n}\left(\frac{2}{7}\right)^k + |v_n - l|$

Or : $a\sum_{k=n+1}^{k=2n}\left(\frac{2}{7}\right)^k = a\left(\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{7}\right)^{n+2} + \cdots + \left(\frac{2}{7}\right)^{2n}\right) = a\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^n}{\frac{5}{7}}\right)$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} a\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^n}{\frac{5}{7}}\right) = 0$ (car $-1 < \frac{2}{7} < 1$) et on a : $\lim_{n\to+\infty}|v_n - \ell| = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

(car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$) D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} a\sum\limits_{k=n+1}^{k=2n}\left(\frac{2}{7}\right)^k + |v_n - l| = 0$

et puisque : $|s_n - l| \leq a\sum\limits_{k=n+1}^{k=2n}\left(\frac{2}{7}\right)^k + |v_n - l|$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \ell$

Exercice 45

I) 1) Déterminons la nature de la suite (u_n)

• 1er cas : $u_0 = 0$

On a : $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \cdots$ et $u_n = 0$

On peut montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = 0$

• 2ème cas : $u_0 = 1$, on a : $u_1 = 0$, et on montre que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = 0$

(u_n) est stationnaire (constante à partir du rang 1)

2) a) Montrons que la suite (u_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$ et $-u_n^2 < 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n < 0$ d'où la suite (u_n) est strictement décroissante

b) Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ dans le cas où (u_n) est convergente

Si (u_n) est convergente, alors sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$ alors $\ell = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

c) Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ dans le cas où $u_0 < 0$ ou $u_0 > 1$

• 1er cas : $u_0 < 0$

Supposons que : (u_n) est minorée par α et puisqu'elle est décroissante alors $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\alpha \leqslant u_n \leqslant u_0 < 0$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \leqslant u_0 < 0$, ce qui est contradiction avec le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (d'après 2 b))

D'où (u_n) est décroissante non minorée, par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

• 2ème cas : $u_0 > 1$

On a : $u_1 = u_0 - u_0^2 = u_0(1 - u_0)$ donc : $u_1 < 0$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (même raisonnement que le premier cas : il suffit de remplacer u_0 par u_1)

For more visit: L9ray.com CamScanner

II) 1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < u_n < 1$

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $0 < u_0 < 1$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $0 < u_n < 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 1$

On a : $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ et puisque $0 < u_n < 1$ alors $0 < 1 - u_n < 1$

D'où : $0 < u_n(1 - u_n) < 1$, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < 1$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < u_n < 1$

b) Déduction :

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2) a) Montrons que : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = u_0 - u_{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1})$

$= (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \ldots + (u_{n-1} - u_n) + (u_n - u_{n+1})$

Donc : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = u_0 - u_{n+1}$

Déduction : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_0 - u_{n+1}) = u_0$ (car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = 0$)

b) Montrons que : $(\forall k \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leqslant \dfrac{u_k^2}{1 + u_k} \leqslant u_k^2$

Soit $k \in \mathbb{N}$; on a $1 + u_k > 1$ donc $0 < \dfrac{1}{1 + u_k} < 1$

d'où $(\forall k \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < \dfrac{u_k^2}{1 + u_k} < u_k^2$

c) Montrons que la suite (s_n) est convergente

On a : $0 < \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{u_k^2}{1 + u_k} < \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2$ donc $0 < s_n < u_0 - u_{n+1}$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ s_n < u_0$

et on a: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ s_{n+1} - s_n = \dfrac{u_{n+1}^2}{1 + u_{n+1}}$ et puisque $u_{n+1}^2 > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ alors $s_{n+1} - s_n > 0$, donc la suite (s_n) est croissante

D'où : (s_n) est croissante et majorée par u_0, donc elle est convergente

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} > 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - u_n^2} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1 - u_n}$

et puisque $0 < 1 - u_n < 1$ alors $\frac{1}{1 - u_n} > 1$ donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} > 1$

b) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$

On a $u_n > 0$ (d'après II) 1 a)). Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n < \frac{1}{n+1}$

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 < \frac{1}{0+1}$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que : $u_n < \frac{1}{n+1}$ c'est-à-dire $\frac{1}{u_n} > n + 1$

montrons que : $u_{n+1} < \frac{1}{n+2}$

On a : $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} > 1$ (d'après la question précédente)

Donc : $\frac{1}{u_{n+1}} > 1 + \frac{1}{u_n}$ d'où : $\frac{1}{u_{n+1}} > 1 + n + 1$ c'est-à-dire : $u_{n+1} < \frac{1}{n+2}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$

Exercice 46

1) a) Calculons u_1, u_2 et u_3 en fonction de k :

On a : $u_0 = k$ donc $u_1 = k + \frac{1}{k} = \frac{k^2 + 1}{k}$ et $u_2 = k + \frac{1}{u_1} = k + \frac{k}{k^2 + 1} = \frac{k^3 + 2k}{k^2 + 1}$

et $u_3 = k + \frac{1}{u_2} = k + \frac{k^2 + 1}{k^3 + 2k} = \frac{k^4 + 3k^2 + 1}{k^3 + 2k}$

b) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $k \leqslant u_n \leqslant k + 1$

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = k$ et $k \leq k \leq k + 1$

• Hérédité : Supposons que : $k \leqslant u_n \leqslant k + 1$ et montrons que $k \leqslant u_{n+1} \leqslant k + 1$

On a: $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ et puisque $k \leq u_n \leq k + 1$ alors $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{k}$

et comme $k \in \mathbb{N}^*$ alors $0 < \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{k} \leq 1$ d'où $k \leq k + \frac{1}{u_n} \leq k + 1$

c'est-à-dire $k \leq u_{n+1} \leq k + 1$, donc la propriété est vraie pour $n + 1$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $k \leq u_n \leq k + 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) a) Calculons x_{n+1} en fonction de x_n et calculons y_{n+1} en fonction de y_n

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_{n+1} = u_{2(n+1)}$ et $y_{n+1} = u_{2(n+1)+1}$

Donc : $x_{n+1} = k + \frac{1}{u_{2n+1}}$ et $y_{n+1} = k + \frac{1}{u_{2(n+1)}}$

D'où : $x_{n+1} = k + \frac{1}{k + \frac{1}{u_{2n}}}$ et $y_{n+1} = k + \frac{1}{k + \frac{1}{u_{2n+1}}}$

c'est-à-dire : $x_{n+1} = k + \frac{u_{2n}}{ku_{2n} + 1}$ et $y_{n+1} = k + \frac{u_{2n+1}}{ku_{2n+1} + 1}$

Ainsi : $x_{n+1} = k + \frac{x_n}{kx_n + 1}$ et $y_{n+1} = k + \frac{y_n}{ky_n + 1}$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} = k + \frac{y_n}{1 + ky_n}$ et $x_{n+1} = k + \frac{x_n}{1 + kx_n}$

b) • Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n < y_n$ et $y_n = k + \frac{1}{x_n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $y_n = u_{2n+1} = k + \frac{1}{u_{2n}} = k + \frac{1}{x_n}$ donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_n = k + \frac{1}{x_n}$

• Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n < y_n$

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $y_0 = u_1 = k + \frac{1}{k}$ et $x_0 = u_0 = k$

Donc : $y_0 - x_0 = \frac{1}{k}$ d'où $y_0 - x_0 > 0$ c'est-à-dire $x_0 < y_0$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $x_n < y_n$ et montrons que $x_{n+1} < y_{n+1}$

On a (d'après 2) a):

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \left(k + \frac{y_n}{1 + ky_n}\right) - \left(k + \frac{x_n}{1 + kx_n}\right)$$

$$= \frac{y_n}{1 + ky_n} - \frac{x_n}{1 + kx_n} = \frac{y_n + kx_n y_n - x_n - kx_n y_n}{(1 + ky_n)(1 + kx_n)} = \frac{y_n - x_n}{(1 + ky_n)(1 + kx_n)}$$

On a : $(1 + kx_n)(1 + ky_n) > 0$ et $y_n - x_n > 0$ donc: $y_{n+1} - x_{n+1} > 0$, c'est-à-dire $x_{n+1} < y_{n+1}$, d'où: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_n > x_n$

c) Étudions la monotonie de la suite (x_n) et de la suite (y_n) en utilisant le raisonnement par récurrence

• Initialisation :

Pour $n = 0$ on a $x_0 = u_0 = k$ et $x_1 = u_2 = k + \frac{k}{k^2 + 1}$ donc $x_1 > x_0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $x_n > x_{n-1}$

et montrons que $x_{n+1} > x_n$

On a : $x_{n+1} - x_n = \left(k + \frac{x_n}{1 + kx_n}\right) - \left(k + \frac{x_{n-1}}{1 + kx_{n-1}}\right)$

$$= \frac{x_n}{1 + kx_n} - \frac{x_{n-1}}{1 + kx_{n-1}}$$

$$= \frac{x_n + kx_nx_{n-1} - x_{n-1} - kx_nx_{n-1}}{(1 + kx_n)(1 + kx_{n-1})}$$

$$= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1 + kx_n)(1 + kx_{n-1})}$$

et puisque $x_n > x_{n-1}$ alors $x_n - x_{n-1} > 0$ d'où $x_{n+1} - x_n > 0$ par conséquent $x_{n+1} > x_n$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_{n+1} > x_n$, donc la suite (x_n) est strictement croissante

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$y_{n+1} - y_n = \left(k + \frac{1}{x_{n+1}}\right) - \left(k + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{-(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+1} \times x_n}$$

et puisque la suite (x_n) est strictement croissantes alors $-(x_{n+1} - x_n) < 0$; donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} - y_n < 0$. D'où la suite (y_n) est strictement décroissante

d) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} - x_{n+1} \leqslant \frac{y_n - x_n}{(1 + k^2)^2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $y_{n+1} - x_{n+1} = \left(k + \frac{y_n}{1 + ky_n}\right) - \left(k + \frac{x_n}{1 + kx_n}\right)$

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{y_n - x_n}{(1 + kx_n)(1 + ky_n)}$$

et d'après 1) b) on a : $x_n \geq k$ et $y_n \geq k$ (car $k \leq u_n \leq k + 1$)

Donc : $1 + kx_n \geq 1 + k^2$ et $1 + ky_n \geq 1 + k^2$ (car $k > 0$)

D'où : $\frac{1}{1 + kx_n} \leq \frac{1}{1 + k^2}$ et $\frac{1}{1 + ky_n} \leq \frac{1}{1 + k^2}$

par suite $\frac{1}{(1 + kx_n)(1 + ky_n)} \leq \frac{1}{(1 + k^2)^2}$

Finalement : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{y_n - x_n}{(1 + k^2)^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

c) Déduisons que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et calculons leur limite

Puisque : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{y_n - x_n}{(1+k^2)^2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} > x_{n+1}$

alors :
$$\begin{cases} 0 < y_n - x_n \leq \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{(1+k^2)^2} \\ 0 < y_{n-1} - x_{n-1} \leq \frac{y_{n-2} - x_{n-2}}{(1+k^2)^2} \\ \quad \cdots \\ 0 < y_2 - x_2 \leq \frac{y_1 - x_1}{(1+k^2)^2} \\ 0 < y_1 - x_1 \leq \frac{y_0 - x_0}{(1+k^2)^2} \end{cases}$$

Par le produit membre à membre et après simplification; on obtient :

$0 < y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{(1+k^2)^2}\right)^n (y_0 - x_0)$ c'est-à-dire : $0 < y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{(1+k^2)^2}\right)^n \times \left(\frac{1}{k}\right)$

et puisque : $-1 < \frac{1}{(1+k^2)^2} < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{(1+k^2)^2}\right)^n = 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$

• On a : (x_n) est croissante et (y_n) est décroissante et $\lim_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$ donc les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes

• Calculons : $\lim_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim_{n \to +\infty} y_n$

On a : $y_n = k + \frac{1}{x_n}$ et puisque (x_n) et (y_n) sont adjacentes alors elles admettent la même limite ℓ où ℓ vérifie $\ell = k + \frac{1}{\ell}$ et $0 < k \leq \ell \leq k + 1$

ℓ est donc solution de l'équation (E) : $\ell^2 - k\ell - 1 = 0$

le discriminant de $\ell^2 - k\ell - 1 = 0$ (où ℓ est l'inconnue) est $\Delta = k^2 + 4$

Les solutions de (E) sont : $\ell_1 = \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}$ et $\ell_2 = \frac{k - \sqrt{k^2+4}}{2}$

Le nombre ℓ_2 ne vérifie pas la condition $\ell > 0$; donc $\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}$

et $\lim_{n \to +\infty} y_n = \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 47

1) • Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n \leq \alpha_{n+4}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a :

$a_n \leq \alpha_n$ et $a_n \leq \alpha_{n+1}$ et $a_n \leq \alpha_{n+2}$ et $a_n \leq \alpha_{n+3}$

car $a_n = \min(\alpha_{n+3}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+1}; \alpha_n)$

Donc : $4a_n \leq \alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3}$

D'où : $a_n \leq \frac{1}{4}(\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3})$ c'est-à-dire : $a_n \leq \alpha_{n+4}$

• Déduisons que la suite (a_n) est croissante

Soit $n \in \mathbb{N}$;

On a : $a_n \leq \alpha_{n+4}$ et $a_n \leq \alpha_{n+1}$ et $a_n \leq \alpha_{n+2}$ et $a_n \leq \alpha_{n+3}$

Donc : $a_n \leq \min(\alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3}; \alpha_{n+4})$ c'est-à-dire : $a_n \leq a_{n+1}$

D'où la suite (a_n) est croissante

2) • Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_n \geq \alpha_{n+4}$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\alpha_n \leq b_n$ et $\alpha_{n+1} \leq b_n$ et $\alpha_{n+2} \leq b_n$ et $\alpha_{n+3} \leq b_n$

car $b_n = \max(\alpha_{n+3}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+1}; \alpha_n)$

Donc : $\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} \leq 4b_n$ (par sommation)

D'où : $\frac{1}{4}(\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3}) \leq b_n$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_n \geq \alpha_{n+4}$

• Déduisons que la suite (b_n) est décroissante (1)

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a :

$\alpha_{n+4} \leq b_n$ et $\alpha_{n+1} \leq b_n$ et $\alpha_{n+2} \leq b_n$ et $\alpha_{n+3} \leq b_n$

Donc : $\max(\alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3}; \alpha_{n+4}) \leq b_n$ c'est-à-dire : $b_{n+1} \leq b_n$

D'où la suite (b_n) est décroissante.

3) a) On a : (a_n) est croissante, donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_0 \leq a_n$

et (b_n) est décroissante donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_n \leq b_0$

et d'après les données on a : $a_n \leq \alpha_n \leq b_n$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_0 \leq a_n \leq \alpha_n \leq b_n \leq b_0$

b) La suite (a_n) est croissante et majorée par b_0, donc elle est convergente et la suite (b_n) est décroissante minorée par a_0, donc elle est convergente.

On pose $\lim a_n = a$ et $\lim b_n = b$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\alpha_{n+4} = \frac{1}{4}(\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3})$

et $a_n \leq \min(\alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3}; \alpha_{n+4})$

Puisque $a_n = \min(\alpha_n; \alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3})$, alors $a_n = \alpha_n$ ou $a_n = \alpha_{n+1}$ ou $a_n = \alpha_{n+2}$ ou $a_n = \alpha_{n+3}$

Supposons par exemple que a_n est le plus petit des nombres, α_n, α_{n+1}, α_{n+2} et α_{n+3} ; alors $a_n = \alpha_n$ et dans ce cas on a :

$\alpha_{n+1} \leq b_n$ et $\alpha_{n+2} \leq b_n$ et $\alpha_{n+3} \leq b_n$ et $\alpha_n = a_n$

D'où : $\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} \leq a_n + 3b_n$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\alpha_{n+4} \leq \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\alpha_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$

Puisque la suite (a_n) est croissante,

alors $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n \leq a$

D'où : $\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n \leqslant \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$

Or $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\alpha_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a_n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\alpha_{n+1} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$

c) Montrons que $b \leqslant a$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\begin{cases} \alpha_{n+4} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+5} \leq \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+6} \leq \frac{3}{4}b_{n+2} + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+7} \leq \frac{3}{4}b_{n+3} + \frac{1}{4}a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_{n+4} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+5} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+6} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a \\ \alpha_{n+7} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a \end{cases}$

Donc : $\max(\alpha_{n+4}; \alpha_{n+5}; \alpha_{n+6}; \alpha_{n+7}) \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où : $b_{n+1} \leq \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a$

Or : $\lim b_{n+1} = b$ et $\lim\left(\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a\right) = \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a$

donc, (d'après limites et ordre);

On a : $b \leq \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a$ donc : $b \leq a$

5) Montrons que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

On a : (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

Reste à montrer que $\lim(a_n - b_n) = 0$

D'après 4) b) $b \leqslant a$

Or $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n \leq b_n$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ d'où $a \leq b$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$, d'où: les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

6) Montrons que (α_n) est convergente

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n \leqslant \alpha_n \leqslant b_n$

et puisque $\lim a_n = \lim b_n = a \in \mathbb{R}$

alors (α_n) est convergente et $\lim \alpha_n = a$

Exercice 48

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$ et $v_n > 0$ (1)

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$

On a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $\frac{u_n + v_n}{2} > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$

On a : $u_{n+1} > 0$ et $v_n > 0$ donc $u_{n+1} \times v_n > 0$ d'où $v_{n+1} > 0$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$ et $v_n > 0$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n < v_n$ (2)

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 < v_0$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n < v_n$ et montrons que $u_{n+1} < v_{n+1}$

On a : $u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 = u_{n+1}^2 - u_{n+1}v_n$

$= u_{n+1}(u_{n+1} - v_n)$

$= \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)\left(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n\right)$

$= \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)$

et puisque $0 < u_n < v_n$ alors $\frac{u_n - v_n}{2} < 0$ et $\frac{u_n + v_n}{2} > 0$ donc $u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 < 0$

c'est-à-dire $u_{n+1}^2 < v_{n+1}^2$, et comme $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$ alors $u_{n+1} < v_{n+1}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n < v_n$

2) Montrons que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est strictement décroissante.

• On a : $u_n < v_n \iff u_n + u_n < u_n + v_n$

$\iff u_n < \frac{u_n + v_n}{2}$

$\iff u_n < u_{n+1}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n < u_{n+1}$ c'est-à-dire que la suite (u_n) est croissante.

• On a : $v_{n+1}^2 - v_n^2 = u_{n+1}v_n - v_n^2$

$= v_n(u_{n+1} - v_n)$

$= v_n\left(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n\right)$

$= v_n\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)$

et puisque $0 < u_n < v_n$ alors $v_{n+1}^2 - v_n^2 < 0$

c'est-à-dire : $v_{n+1}^2 < v_n^2$ et comme $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n > 0$ alors : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} < v_n$

Par conséquent la suite (v_n) est strictement décroissante.

3) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} < v_n \iff v_{n+1} - u_{n+1} < v_n - u_{n+1}$

$\iff v_{n+1} - u_{n+1} < v_n - \frac{u_n + v_n}{2}$

$\iff v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{v_n - u_n}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 < v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 < \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{v_n - u_n} < \frac{1}{2}$

Donc : $0 < \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{v_{k+1} - u_{k+1}}{v_k - u_k}\right) < \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

D'où : $0 < \frac{v_n - u_n}{v_0 - u_0} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c'est-à-dire : $0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$ car $(\forall k \in \mathbb{N})$: $v_k - u_k > 0$

Méthode 2 : (on peut utiliser le raisonnement par récurrence)

b) On a : $0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$ et $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) = 0$ (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

Donc : $\lim_{n \to +\infty}(v_n - u_n) = 0$

et puisque (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, alors les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, par suite elles admettent la même limite

4) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

• Initialisation : Pour $n = 0$

On a : $u_0 = v_0 \cos(\alpha)$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n = v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ et montrons que:

$u_{n+1} = v_{n+1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$

On a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$

$= \frac{1}{2}\left(v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) + v_n\right)$

$= \frac{1}{2} v_n \left(1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right)$

$= \frac{1}{2} v_n \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\right)$

$= v_n \cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$ (a)

et $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$

$= \sqrt{v_n^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}$

$= v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$; car $0 < \frac{\alpha}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) > 0 \text{ et } v_n > 0\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $u_{n+1} = v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$ (d'après (a))

$= v_{n+1}\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

b) Déduisons que : $v_n = v_0 \times \frac{\sin\alpha}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

On a : $v_{n+1}^2 = u_{n+1}v_n$

Donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$

Or : $\sin(\theta) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, donc $\frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

On prend $\theta = \frac{\alpha}{2^n}$ on obtient : $\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}$

Donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}$; d'où : $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{v_{k+1}}{v_k} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right)}$

Par conséquent : $\frac{v_n}{v_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\sin(\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$; donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = v_0 \times \frac{\sin(\alpha)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

c) Déterminons $\lim v_n$ en fonction de v_0 et α

On a : $v_n = v_0 \times \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}}{\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}}$

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On a : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$, donc f est continue en 0

et on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 0$ (car $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$)

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{2^n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = f(0)$ (car f est continue en 0)

$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} = 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0 \times \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

Déduction :

On a : $u_n \leq u_n < v_n \leq v_0$; donc : $u_0 < v_n \leq v_0$; et puisque (v_n) est convergente,

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_0$, donc $u_0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant v_0$

Ainsi : $v_0 \cos\alpha \leq v_0 \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \leq v_0$; donc : $\cos\alpha \leq \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \leq 1$; (car $v_0 > 0$)

Par conséquent : $\left(\forall \alpha \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$; $\sin\alpha \leq \alpha \leq \tan\alpha$

d) Dans le cas où $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$; déterminons $\lim u_n$.

On a : $\cos\alpha = \dfrac{u_0}{v_0} = \dfrac{1}{2}$; donc : $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ (car $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$)

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0 \times \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ et $v_0 \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 2.\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

4 Leçon Fonctions logarithmiques

Maxi.

Résumé

1 Fonction logarithme népérien

1) Définition et propriétés:

Définition: La fonction logarithme népérienne est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 ; on la note ln .

Conséquences:

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$.
- $\ln 1 = 0$
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et : $(\forall x \in]0;+\infty[) : (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$
- La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$ on a: $a < b \iff \ln a < \ln b$
- Le signe de $\ln(x)$; où $x \in]0;+\infty[$
  - $\ln x = 0 \iff x = 1$
  - $\ln x > 0 \iff x > 1$
  - $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$

Propriété: (égalité)

Pour tous a et b de $]0;+\infty[$ on a : $\ln a = \ln b \iff a = b$

Propriété fondamental:

Pour tous a et b de $]0;+\infty[$ on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Propriétés:

Soit a et b deux éléments de $]0;+\infty[$ et r un élément de $\mathbb{Q}$, on a :

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$
- $\ln(a^r) = r \ln a$
- $r = \ln$

Remarques:

- Si $xy > 0$ alors : $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$ et $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln|x| - \ln|y|$
- Si $x \in \mathbb{R}^*$ alors : $\ln x^2 = 2\ln|x|$.

2) Limites usuelles:

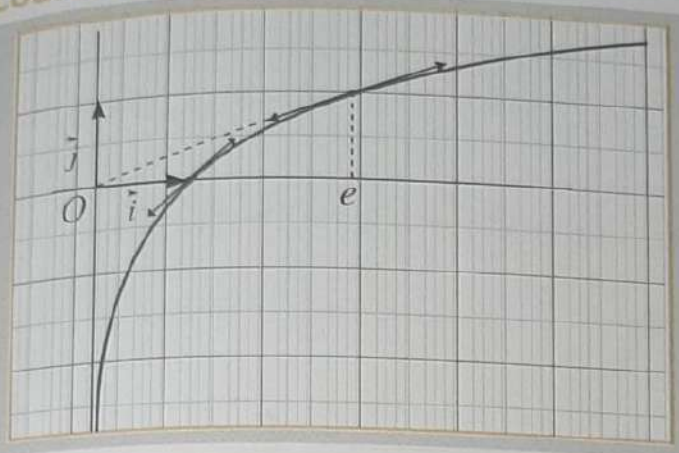
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} =$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$

For more visit: L9ray.com
CamScanner

3) Tableau de variations de la fonction ln :

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$	
$\ln$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) Courbe de la fonction ln



$lnx = 1 \Leftrightarrow x = e$
où $e \simeq 2,7$

5) La dérivée logarithmique d'une fonction

Définition: Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I : c'est-à-dire : $((\forall x \in I) ; u(x) \neq 0)$.

La fonction : $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ (où u' est la fonction dérivée du u) est appelé la dérivée logarithmique de la fonction u sur l'intervalle I

Propriété 1:

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle, alors la fonction $f : x \longmapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est la dérivée logarithmique de la fonction u c'est-à-dire : $(\forall x \in I) ; f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Propriété 2:

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I.

Les primitives de la fonction : $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I, sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

For more visit: L9ray.com
CamScanner

2 Fonction logarithme de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définition: Soit a un nombre réel strictement positif et distinct de 1. La fonction logarithme de base a est la fonction notée $\log_a$ et qui est définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Conséquences:

- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(e) = \dfrac{1}{\ln a}$
- $\log_a(1) = 0$
- $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; \log_e(x) = \ln x$
- $\ln = \log_e$

Propriétés:

Pour tous x et y de $]0;+\infty[$, et pour tout a de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ on a :

1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2) $\log_a\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$
3) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
4) $(\forall r \in \mathbb{Q})\ ; \log_a(x^r) = r\log_a(x)$.

3 Fonction logarithme décimale

Définition: La fonction logarithme décimale est la fonction logarithme de base 10, et notée log au lieu de $\log_{10}$, et on a : $\log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ pour tout x de $]0;+\infty[$

Conséquences:

- $\log 10 = 1$
- $\log(1) = 0$
- $(\forall r \in \mathbb{Q})\ ; \log(10^r) = r$

4 Variations de la fonction logarithme de base a

La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; (\log_a)'(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$

Cas où $a > 1$

x	0		$+\infty$
$\log_a'(x)$	‖	$+$	
$\log_a$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Cas où $0 < a < 1$

x	0		$+\infty$
$\log_a'(x)$	‖	$-$	
$\log_a$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercices d'application

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(x^2) = 16$

2) $(\ln(x))^2 = 16$

3) $\ln(x^2-4) - \ln(1-4x) = 0$

4) $\ln(x-2) + \ln(4-x) = \ln(2x-5)$

5) $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = 2\ln(x)$

6) $(\ln(x))^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

7) $\ln(10-x^2) = 2\ln(3) - \ln(x^2)$

Exercice 2

Résoudre $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\ln x < 3\ln(2) - \ln(3)$

2) $\ln(x^2-1) < 0$

3) $\ln(\ln(x)) > 0$

4) $(1-\ln(x))(3+\ln(x)) \geq 0$

5) $\frac{2+\ln(x)}{2\ln(x)-1} < 0$

6) $\ln(x+6) > 2\ln x$

Exercice 3

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 2 \\ 2\ln(x) - 3\ln(y) = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \ln(x^2.y^3) = -4 \\ \ln\left(\frac{x^3}{y^4}\right) = 11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (\ln(x)).(\ln(y)) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(3) \end{cases}$

Exercice 4

Soit a et b deux réels tels que : $a > 1$ et $0 \leq b < a$

Montrer que : $(\ln(a-b)).(\ln(a+b)) \leq (\ln(a))^2$

Exercice 5

Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f, dans chacun des cas suivants:

For more visit: L9ray.com CamScanner

1) $f(x)=\ln|x-1|+\ln(x)$

2) $f(x)=x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

3) $f(x)=\frac{\ln(x)}{1-\ln(x)}$

4) $f(x)=\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x-2}$

5) $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)$

6) $f(x)=\ln(k^2-2k\cos(x)+1)$ où $k\in\mathbb{R}$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{x^3}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{2x+1}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{\ln(2x+1)}$

6) $\lim\limits_{x\to0^+}x^3\ln^2(x)$

7) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}.\ln^2(x)$

8) $\lim\limits_{x\to0^+}x.\sqrt{|\ln x|}$

9) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{2x}{x-1}+\ln(x-1)\right)$

10) $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\ln(x^2-2x)$

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

2) $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2-x-\ln(x+1)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}3x-\ln(x^2+1)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x}{x-3}.\ln\left(\frac{x}{3}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}.\ln(\cos x)$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)-\ln(x)}{1+2\ln(x)}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1+\sqrt{x^2+1})}{2x}$

Exercice 8

Déterminer dans chacun des cas suivants, la fonction dérivée de la fonction f

1) $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$

5) $f(x)=x^2.\sqrt{|\ln x|}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{x-1}$

3) $f(x)=x.\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

4) $f(x)=x\left(1-\dfrac{1}{\ln(x)}\right)^2$

6) $f(x)=\sqrt{1-\ln(x-1)}$

7) $f(x)=x\ln(x)-(1-x)\ln(1-x)$

8) $f(x)=\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$

1) Déterminer D l'ensemble le définition de la fonction f

2) étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1

3) Calculer $f'(x)$ pour tout élément x de $D-\{1;-1\}$

Exercice 10

Soit u la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]-1;+\infty[$ par $u(x)=x-\ln(x+1)$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction u.

2) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$

Exercice 11

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b- Déterminer les limites aux bornes des intervalles de D

2) a- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b- Montrer que le point $A\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$.

3) Construire $(\mathscr{C})$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Solutions

Exercice 1

Soit D l'ensemble de définition de l'équation proposée, et S son ensemble de solutions.

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x^2) = 16$

On a : $D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$

On a : $\ln(x^2) = 16 \iff 2\ln|x| = 16$

$\iff \ln|x| = 8 \quad (\forall r \in \varphi), (\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); (\ln x = r \iff x = e^r)$

$\iff |x| = e^8$

$\iff x = e^8$ ou $x = -e^8$

Donc : $S = \{e^8; -e^8\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\ln(x))^2 = 16$

On a : $D = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\} =]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$:

On a : $(\ln(x))^2 = 16 \iff \ln(x) = 4$ ou $\ln x = -4$

$\iff x = e^4$ ou $x = e^{-4}$

Donc : $S = \{e^4; e^{-4}\}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x^2 - 4) - \ln(1 - 4x) = 0$

- Déterminons D.

Soit $x \in \mathbb{R}$:

On a : $x \in D \iff x^2 - 4 > 0$ et $1 - 4x > 0$

$\iff x \in (]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[)$ et $x < \frac{1}{4}$

Donc : $D =]-\infty; -2[$

Soit $x \in]-\infty; -2[$:

On a : $\ln(x^2 - 4) - \ln(1 - 4x) = 0 \iff \ln(x^2 - 4) = \ln(1 - 4x)$

$\iff x^2 - 4 = 1 - 4x$ (car ln est une application

$\iff x^2 + 4x - 5 = 0$ bijective de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$

et on a : 1 et -5 sont les solutions de l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$ dans $\mathbb{R}$

et puisque : $1 \notin D$ et $-5 \in D$, alors : $S = \{-5\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x - 2) + \ln(4 - x) = \ln(2x - 5)$

- Déterminons D.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $x \in \mathbb{R}$:

On a : $x \in D \Leftrightarrow x-2>0$ et $4-x>0$ et $2x-5>0$

$\Leftrightarrow x>2$ et $x>\frac{5}{2}$ et $x<4$

$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{5}{2};4\right[$

Donc : $D=\left]\frac{5}{2};4\right[$.

Soit $x \in \left]\frac{5}{2};4\right[$:

On a : $\ln(x-2)+\ln(4-x)=\ln(2x-5) \Leftrightarrow \ln(x-2)(4-x)=\ln(2x-5)$

$\Leftrightarrow (x-2)(4-x)=(2x-5)$

(car ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$).

Donc : $x^2-4x+3=0$.

et on a : 1 et 3 sont les solutions de l'équation $x^2-4x+3=0$ dans $\mathbb{R}$

et puisque : $1 \notin D$ et $3 \in D$ alors : $S=\{3\}$.

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(4x+2)-\ln(x-1)=2\ln x$

- Déterminons D.

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $x \in D \Leftrightarrow 4x+2>0$ et $x-1>0$ et $x>0$

$\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$ et $x>1$ et $x>0$

$\Leftrightarrow x>1$

Donc : $D=]1;+\infty[$

Soit $x \in]1;+\infty[$, l'équation proposée est équivalente à l'équation :

$\ln\left(\frac{4x+2}{x-1}\right)=\ln(x^2)$, donc : $x^2=\frac{4x+2}{x-1}$, c'est-à-dire : $x^3-x^2-4x-2=0$

On remarque que -1 et une racine du polynôme x^3-x^2-4x-2 :

et on a : $x^3-x^2-4x-2=(x+1)(x^2-2x-2)$

les solutions de l'équation $x^2-2x-2=0$ sont $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

et puisque $1+\sqrt{3} \in D$, $1-\sqrt{3} \notin D$ et $-1 \notin D$, alors $S=\{1+\sqrt{3}\}$.

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $(\ln(x))^2-\ln\left(\frac{1}{x}\right)=2$

On a : $D=]0;+\infty[$,

soit $x \in]0;+\infty[$. L'équation (E) s'écrit $(\ln(x))^2+\ln(x)-2=0$

Posons $X=\ln(x)$

(E) devient $X^2+X-2=0$, donc $X=1$ ou $X=-2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

c'est-à-dire $\ln x = 1$ ou $\ln(x) = -2$ donc : $S = \{e; e^{-2}\}$

7) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(10 - x^2) = 2\ln(3) - \ln(x^2)$

Déterminons D.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

On a : $x \in D \Leftrightarrow 10 - x^2 > 0$ et $x^2 > 0$

$\Leftrightarrow |x| < \sqrt{10}$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{10}, 0[\cup]0, \sqrt{10}[$

Donc : $D =]-\sqrt{10}, 0[\cup]0, \sqrt{10}[$

Soit $x \in D$

On a : $\ln(10 - x^2) = 2\ln(3) - \ln(x^2) \Leftrightarrow \ln(10 - x^2) + \ln x^2 = \ln(9)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2(10 - x^2)) = \ln(9)$

$\Leftrightarrow x^2(10 - x^2) = 9$

$\Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$ ou $x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x \in \{-1, 1, 3, -3\}$

Donc : $S = \{-3, -1, 1, 3\}$

Exercice 2

Dans tous ce qui suit D est l'ensemble de définition de l'inéquation proposée et S son ensemble de solutions.

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(x) < 3\ln(2) - \ln(3)$

On a : $D =]0; +\infty[$

Soit $x \in D$, on a : $\ln(x) < 3\ln(2) - \ln(3) \Leftrightarrow \ln(x) < \ln\left(\frac{8}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x < \frac{8}{3}$

Donc : $S = \left]0; \frac{8}{3}\right[$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(x^2 - 1) < 0$

On a : $D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 > 0\} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

Soit $x \in D$, on a :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$\ln(x^2-1)<0 \Leftrightarrow 0<x^2-1<1$

$\Leftrightarrow 1<x^2<2$

$\Leftrightarrow 1<|x|<\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x\in]-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}[$

et puisque : $]-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}[\subset D$ alors : $S=]-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}[$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln((\ln x))>0$

On a : $D=\{x\in\mathbb{R}/x>0 \text{ et } \ln(x)>0\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/x>0 \text{ et } x>1\}=]1,+\infty[$

Soit $x\in D$, on a : $\ln(\ln(x))>0 \Leftrightarrow \ln(x)>1$

$\Leftrightarrow x>e$

Donc : $S=]e;+\infty[$

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $(1-\ln(x))(3+\ln(x))\geq 0$

On a : $D=]0;+\infty[$

Soit $x\in D$, on a : $(1-\ln(x))(3+\ln(x))\geq 0 \Leftrightarrow (\ln(x)-1)(\ln(x)+3)\leq 0$

$\Leftrightarrow -3\leq \ln(x)\leq 1$

$\Leftrightarrow \ln(e^{-3})\leq \ln(x)\leq \ln(e)$

$\Leftrightarrow e^{-3}\leq x\leq e$

Donc : $S=[e^{-3};e]$

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\dfrac{2+\ln(x)}{2\ln(x)-1}<0$

On a : $D=\{x\in\mathbb{R}/x>0 \text{ et } 2\ln(x)-1\neq 0\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/x>0 \text{ et } x\neq\sqrt{e}\}$

Donc : $D=]0;\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e};+\infty[$

Soit $x\in D$, on a :

$\dfrac{2+\ln(x)}{2\ln(x)-1}<0 \Leftrightarrow (\ln(x)+2)(2\ln(x)-1)<0$

$\Leftrightarrow -2<\ln(x)<\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln(e^{-2})<\ln(x)<\ln\sqrt{e}$

$\Leftrightarrow e^{-2}<x<\sqrt{e}$

Donc : $S=]e^{-2};\sqrt{e}[$

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(x+6)>2\ln x$

On a : $D=\{x\in\mathbb{R}/x+6>0 \text{ et } x>0\}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

donc : $D=]0;+\infty[$

Soit $x\in D$, on a : $\ln(x+6)>2\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x+6)>\ln(x^2)$

$\Leftrightarrow x+6>x^2$

$\Leftrightarrow x^2-x-6<0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-3)<0$

$\Leftrightarrow -2<x<3$

Donc : $S=]-2;3[\cap]0;+\infty[=]0;3[$

Exercice 3

Dans tous ce qui suit E est l'ensemble de définition du système proposé et S son ensemble de solutions.

1) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases}\ln(x)-\ln(y)=2\\2\ln(x)-3\ln(y)=5\end{cases}$

On a : $E=]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ c'est-à-dire $E=(\mathbb{R}^{*+})^2$

Soit (x,y) un élément E, on pose $a=\ln x$ et $b=\ln y$

Le système devient : $\begin{cases}a-b=2\\2a-3b=5\end{cases}$, c'est-à-dire: $\begin{cases}a=b+2\\b=-1\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

D'où : $\ln x=1$ et $\ln y=-1$, par conséquent $x=e$ et $y=\frac{1}{e}$,

d'où : $S=\left\{\left(e;\frac{1}{e}\right)\right\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases}\ln(x^2.y^3)=-4\\\ln\left(\frac{x^3}{y^4}\right)=11\end{cases}$

• Déterminons D.

On a : $(x,y)\in E \Leftrightarrow \begin{cases}x^2.y^3>0\\\frac{x^3}{y^4}>0 \text{ et } y\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y>0 \text{ et } x\neq 0\\x>0 \text{ et } y\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x>0 \text{ et } y>0$

Donc : $E=(\mathbb{R}^{*+})^2$

• Déterminons S :

Soit (x,y) un élément de E :

On a : $\begin{cases}\ln(x^2y^3)=-4\\\ln\left(\frac{x^3}{y^4}\right)=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x^2)+\ln(y^3)=-4\\\ln(x^3)-\ln(y^4)=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\ln(x)+3\ln(y)=-4\\3\ln(x)-4\ln(y)=11\end{cases}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$\Leftrightarrow \ln(x) = 1$ et $\ln y = -2$

$\Leftrightarrow x = e$ et $y = e^{-2}$

Donc : $S = \{(e; e^{-2})\}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} (\ln(x)).(\ln(y)) = -15 \\ \ln(x.y) = -2 \end{cases}$

On a : $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } xy > 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$

Donc : $E = (\mathbb{R}^{*+})^2$.

Soit (x,y) un élément de E, on a :

$\begin{cases} \ln(x).\ln(y) = -15 \\ \ln(x.y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x).\ln(y) = -15 \\ \ln(x) + \ln(y) = -2 \end{cases}$

Posons : $a = \ln(x)$ et $b = \ln(y)$, le système devient : $\begin{cases} a + b = -2 \\ a.b = -15 \end{cases}$

Donc : a et b sont les solutions (si elles existent) de l'équation $t^2 + 2t - 15 = 0$ dans $\mathbb{R}$

et on a : $t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ ou $t = -5$

Donc : $(a;b) = (3;-5)$ ou $(a;b) = (-5;3)$

D'où : $(x;y) = (e^3; e^{-5})$ ou $(x;y) = (e^{-5}; e^3)$

Par conséquent : $S = \{(e^3; e^{-5}); (e^{-5}; e^3)\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(3) \end{cases}$

On a : $E = (\mathbb{R}^{*+})^2$.

Soit $(x;y)$ un élément de E.

Puisque : $\ln(x) + \ln(y) = \ln(3) \Leftrightarrow \ln(xy) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow xy = 3$

alors le système devient : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2.y^2 = 9 \end{cases}$

Donc: x^2 et y^2 sont les solutions (si elles existent) de l'équation $t^2 - 10t + 9 = 0$ dans $\mathbb{R}$

D'où : $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

Et puisque : $x > 0$ et $y > 0$ alors : $(x;y) \in \{(1;3);(3;1)\}$, par conséquent : $S = \{(1;3);(3;1)\}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 4

Montrons que : $(\ln(a-b)).(\ln(a+b)) \leq (\ln(a))^2$

On a $a > 1$ et $0 \leq b < a$, donc : $a-b > 0$ et $0 \leq \frac{b}{a} < 1$, d'où : $1-\frac{b}{a} > 0$

Et puisque : $a-b = a\left(1-\frac{b}{a}\right)$ alors : $\ln(a-b) = \ln(a) + \ln\left(1-\frac{b}{a}\right)$

et on a aussi : $a+b > 0$ et $1+\frac{a}{b} > 0$. Et puisque : $a+b = a\left(1+\frac{b}{a}\right)$

alors : $\ln(a+b) = \ln(a) + \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$

Donc : $\ln(a-b) \times \ln(a+b) = \left(\ln(a) + \ln\left(1-\frac{b}{a}\right)\right)\left(\ln a + \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)$

c'est-à-dire :

$$(\ln(a-b))(\ln(a+b)) = (\ln(a))^2 + \ln(a)\left(\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) + \ln\left(1-\frac{b}{a}\right)\right) + \ln\left(1-\frac{b}{a}\right) \times \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

$$= (\ln(a))^2 + \ln(a).\ln\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) + \ln\left(1-\frac{b}{a}\right).\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

et on a : $0 \leq \frac{b}{a} < 1$, donc : $0 < 1-\frac{b}{a} \leq 1$ et $0 < 1-\left(\frac{b}{a}\right)^2 \leq 1$

Donc : $\ln\left(1-\frac{b}{a}\right) \leq 0$ et $\ln\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \leq 0$

Et on a : $\ln(a) > 0$ (car $a > 1$) et $\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) > 0$ (car $1+\frac{b}{a} > 1$)

D'où : $(\ln(a)).\ln\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) + \ln\left(1-\frac{b}{a}\right).\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq 0$

Par suite : $(\ln(a-b)).(\ln(a+b)) \leq (\ln(a))^2$

Exercice 5

1) Déterminons D, où $f(x) = \ln|x-1| + \ln(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$x \in D \Leftrightarrow |x-1| > 0$ et $x > 0$

$\Leftrightarrow |x-1| \neq 0$ et $x > 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ et $x > 0$

Donc : $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$

2) Déterminons D, où $f(x) = x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$x \in D \Leftrightarrow x+1 \neq 0$ et $\frac{x-1}{x+1} > 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1) > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $D =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

3) Déterminons D, où $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1-\ln(x)}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $1 - \ln(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $\ln(x) \neq 1$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq e$

Donc : $D =]0;e[\cup]e;+\infty[$

4) Déterminons D, où $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x-2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln(x) \geq 0$ et $x - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant 1$ et $x > 0$ et $x \neq 2$

$\Leftrightarrow x \geq 1$ et $x \neq 2$

$\Leftrightarrow x \in [1;2[\cup]2;+\infty[$

Donc : $D = [1;2[\cup]2;+\infty[$

5) Déterminons D, où $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$x \in D \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x - \dfrac{1}{x} > 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $\dfrac{x^2-1}{x} > 0$

$\Leftrightarrow x(x^2-1) > 0$

Dressons le tableau de signe de $x(x^2-1)$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2-1	+	0	−		−	0	+
x	−		−	0	+		+
$x(x^2-1)$	−	0	+	0	−	0	+

Donc : $x(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1;0[\cup]1;+\infty[$

D'où : $D =]-1;0[\cup]1;+\infty[$

6) Déterminons D, où $f(x) = \ln(k^2 - 2k\cos(x) + 1)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$x \in D \Leftrightarrow k^2 - 2k\cos(x) + 1 > 0$

et puisque : $k^2 - 2k\cos(x) + 1 = k^2 - 2k\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)$

$= (k - \cos(x))^2 + \sin^2(x)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

alors : $k^2 - 2k\cos(x) + 1 \geq 0$

Donc : $x \in D \Leftrightarrow k^2 - 2k\cos(x) + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow (k - \cos(x))^2 + \sin^2(x) \neq 0$ ($A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$ et $B = 0$)

$\Leftrightarrow \cos(x) \neq k$ ou $\sin(x) \neq 0$

et on a : $(k - \cos(x))^2 + \sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = k$ et $\sin x = 0$

D'où : $\begin{cases} \cos(x) = k \\ \sin(x) = 0 \end{cases}$ ainsi $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = k^2$

alors : $k = 1$ ou $k = -1$

• Si $k = 1$ alors : $x \in D \Leftrightarrow 2 - 2\cos(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) \neq 1$

$\Leftrightarrow x \neq 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

• Si $k = -1$ alors :

$x \in D \Leftrightarrow 2 + 2\cos(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) \neq -1$

$\Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

• Si : $k \neq 1$ et $k \neq -1$ alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (\cos(x) - k)^2 + \sin^2(x) \neq 0$

Donc : $D = \mathbb{R}$.

Exercice 6

1) Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x^3}$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\dfrac{\ln^2(x)}{x^3} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 = 0$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2 = 0$ par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x^3} = 0$

2) Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\ln(x) = 2\ln(\sqrt{x})$, donc : $\dfrac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{4\ln^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

On pose : $\sqrt{x} = t^2$ avec $t > 0$. Si x tend vers $+\infty$ alors t tend vers $+\infty$.

et $\dfrac{4\ln^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \dfrac{4\ln^2(t^2)}{t^2} = 4\dfrac{(2\ln t)^2}{t^2} = 16\left(\dfrac{\ln(t)}{t}\right)^2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et puisque $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$ alors $\lim_{t\to+\infty}16\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)^2=0$ donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}=0$

3) Calculons : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}$

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $\frac{\ln(1+x)}{x^2}=\frac{\ln(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x^2}$

posons : $t=x+1$ on a : $x\to+\infty\iff t\to+\infty$

donc : $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$

Et comme : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ alors : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}=0$

4) Calculons : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{2x+1}$

Soit $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$, on a : $\ln(x^2-x+1)=\ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$=\ln(x^2)+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=2\ln(-x)+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

Donc : $\frac{\ln(x^2-x+1)}{2x+1}=2\times\frac{\ln(-x)}{2x+1}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{2x+1}$

$=2.\frac{\ln(-x)}{(-x)}\cdot\frac{(-x)}{2x+1}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{2x+1}$

et puisque : $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$ et la fonction ln est continue en 1

alors $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\ln(1)=0$ et on a : $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x+1}=0$

donc : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x+1}\times\left(\ln 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$

posons : $t=-x$, on a : $x\longrightarrow-\infty\iff t\longrightarrow+\infty$

Donc : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{(-x)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$,

et on a : $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x+1}\lim_{x\to-\infty}=\frac{-x}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

D'où : $\lim_{x\to-\infty}2.\frac{\ln(-x)}{(-x)}\cdot\frac{(-x)}{2x+1}=0$, par suite : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{2x+1}=0$

5) Calculons : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{\ln(2x+1)}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a :

$\ln(x+2) = \ln\left(x\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \ln(x)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$

et $\ln(2x+1) = \ln(x) + \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = \ln(x)\left(1+\frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$

Donc : $\frac{\ln(x+2)}{\ln(2x+1)} = \frac{1+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)}}{1+\frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

alors: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$ par conséquent :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(2x+1)} = 1$

6) Calculons : $\lim\limits_{x\to0^+} x^3.\ln^2(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} x^3.\ln^2(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x.(x\ln x)^2 = 0$

Car $\lim\limits_{x\to0^+} (x\ln(x))^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0$

7) Calculons : $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt[3]{x}.\ln^2(x)$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $\ln\left(\sqrt[6]{x}\right) = \frac{1}{6}\ln(x)$

c'est-à-dire : $\ln(x) = 6\ln\left(\sqrt[6]{x}\right)$ et on a : $\left(\sqrt[6]{x}\right)^2 = \sqrt[3]{x}$

Donc : $\sqrt[3]{x}.\ln^2(x) = \left(\sqrt[6]{x}\right)^2.\left(6\ln\left(\sqrt[6]{x}\right)\right)^2 = 36\left(\sqrt[6]{x}.\ln\left(\sqrt[6]{x}\right)\right)^2$

Posons : $t = \sqrt[6]{x}$, on a : $x \longrightarrow 0^+ \Longleftrightarrow t \longrightarrow 0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt[6]{x}.\ln\left(\sqrt[6]{x}\right) = \lim\limits_{t\to0^+} t\ln(t) = 0$, d'où : $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\sqrt[6]{x}.\ln\left(\sqrt[6]{x}\right)\right)^2 = 0$

Par suite : $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt[3]{x}.\ln^2(x) = 0$

Méthode 2 :

On pose $\sqrt[3]{x} = t^2$ avec $t > 0$ alors $x = t^6$ et on a : $x \longrightarrow 0^+ \Longleftrightarrow t \longrightarrow 0^+$

donc $\lim\limits_{x\to0^+} (\sqrt[3]{x}\ln^2 x) = \lim\limits_{t\to0^+} t^2\ln^2(t^6) = \lim\limits_{t\to0^+} t^6(6\ln t)^2 = \lim\limits_{t\to0^+} 36t\ln t = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

8) Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\sqrt{|\ln(x)|}$

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $x.\sqrt{|\ln x|}=\sqrt{x^2|\ln x|}=\sqrt{x|x\ln x|}$

et puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} x|x\ln(x)|=0$, donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x|x\ln x|}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{|\ln x|}=0$

9) Calculons : $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2x}{x-1}+\ln(x-1)\right)$

Soit $x\in]1;+\infty[$, on a : $\dfrac{2x}{x-1}+\ln(x-1)=\dfrac{1}{x-1}(2x+(x-1)\ln(x-1))$

posons : $x-1=t$, on a : $x\longrightarrow 1^+\Longleftrightarrow t\longrightarrow 0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)=\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t)=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+(x-1)\ln(x-1))=2$

et puisque : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}(2x+(x-1)\ln(x-1))=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x}{x-1}+\ln(x-1)=+\infty$

10) Calculons : $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\ln(x^2-2x)$

Soit $x\in]2;+\infty[$, on a : $(x-2)\ln(x^2-2x)=(x-2)\ln(x(x-2))$

$=(x-2)(\ln(x)+\ln(x-2))$

$=(x-2)\ln(x)+(x-2)\ln(x-2)$

posons : $t=x-2$ on a : $x\longrightarrow 2^+\Longleftrightarrow t\longrightarrow 0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\ln(x-2)=\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t)=0$

et puisque : $\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x)=\ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$, alors : $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\ln(x)=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\ln(x^2-2x)=0$

Exercice 7

1) Calculons : $\lim\limits_{x\to -\infty}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} 1+x^2=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{1+x^2}=+\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x)=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{1+x^2}-x=+\infty$

et puisque $\lim\limits_{X\to +\infty}\ln(X)=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to -\infty}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=+\infty$

Calculons : $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0^+$ et $\lim_{X\to0^+}\ln(X)=-\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-\infty$

2) • Calculons : $\lim_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

On a : $\lim_{x\to1^+}\frac{x}{x-1}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$, donc : $\lim_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=+\infty$

3) • Calculons : $\lim_{x\to+\infty}(2x^2-x-\ln(x+1))$

Soit $x\in]0;+\infty[$ on a : $2x^2-x-\ln(x+1)=(x+1)\left(\frac{2x^2-x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$

on pose : $t=x+1$,

on a : $x\longrightarrow+\infty\iff t\longrightarrow+\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$,d'où : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$

et puisque : $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ alors : $\lim_{x\to+\infty}(2x^2-x-\ln(x+1))=+\infty$

4) Calculons : $\lim_{x\to+\infty}(3x-\ln(x^2+1))$

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $3x-\ln(x^2+1)=3x-\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$=3x-2\ln(x)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x\left(3-2\frac{\ln(x)}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$ et la fonction ln est continue 1,

donc : $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\ln(1)=0$

Or : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty}x\left(3-\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$

D'où : $\lim_{x\to+\infty}3x-\ln(x^2+1)=+\infty$

5) Calculons : $\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

info : $\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$

On pose $h=\frac{2}{x}$,on a : $x\longrightarrow+\infty\iff h\longrightarrow0^+$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{h\to0^+}2.\frac{\ln(1+h)}{h}=2.\lim_{h\to0^+}\frac{\ln(1+h)}{h}=2$

6) Calculons : $\lim_{x\to-\infty}x.\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Soit $x\in]-\infty;-1[$, on a :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\left(\frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-1}\right)\cdot\left(\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-1}{\frac{1}{x}}\right)=\left(\frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-1}\right)\cdot\left(\frac{-2x}{x+1}\right)$$

Posons : $t=\frac{x-1}{x+1}$, on a : si x tend vers $-\infty$ alors t tend vers 1

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-1}=\lim\limits_{t\to1}\frac{\ln(t)}{t-1}=1,$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2)=-2$. Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}x.\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-2$

7) Calculons : $\lim\limits_{x\to3}\frac{x}{x-3}.\ln\left(\frac{x}{3}\right)$

Méthode 1 :

On pose : $\frac{x}{3}=1+h$ c'est-à-dire $x-3=3h$ et on a : $x\longrightarrow3\Longleftrightarrow h\longrightarrow0$

Donc : $\frac{x}{x-3}\ln\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{3(1+h)}{3h}.\ln(1+h)=(1+h).\frac{\ln(1+h)}{h}$

Puisque : $\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ et $\lim\limits_{h\to0}(1+h)=1$ alors : $\lim\limits_{h\to0}(1+h).\frac{\ln(1+h)}{h}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to3}\frac{x}{x-3}.\ln\left(\frac{x}{3}\right)=1$

Méthode 2 :

On a : $\frac{x}{x-3}\ln\left(\frac{x}{3}\right)=x\left(\frac{\ln(x)-\ln(3)}{x-3}\right)$

et puisque la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$,

alors $\lim\limits_{x\to3}\frac{\ln(x)-\ln(3)}{x-3}=(\ln)'(3)=\frac{1}{3}$

et on a : $\lim\limits_{x\to3}x=3$ donc : $\lim\limits_{x\to3}\frac{x}{x-3}.\ln\left(\frac{x}{3}\right)=1$

8) Calculons : $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}.\ln(\cos x)$

On a : $\frac{1}{x^2}.\ln(\cos x)=\frac{\ln(\cos x)}{\cos x-1}.\frac{\cos x-1}{x^2}$

Posons : $t=\cos x$. On a : $x\longrightarrow0\Longleftrightarrow t\longrightarrow1,$

donc : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\cos x-1}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(t)}{t-1}=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$, donc : $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}.\ln(\cos x)=-\frac{1}{2}$

9) Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)-\ln(x)}{1+2\ln(x)}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On pose : $t = \ln(x)$. On a : $x \longrightarrow +\infty \Longleftrightarrow t \longrightarrow +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2(x)-\ln(x)}{1+2\ln(x)} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2-t}{1+2t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2}{2t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{2} = +\infty$

10) Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1+\sqrt{x^2+1})}{2x}$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a :

$\ln(x+1+\sqrt{x^2+1}) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

Donc : $\dfrac{\ln(x+1+\sqrt{1+x^2})}{2x} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{2x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 2$ et la fonction ln est continue en 2

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \ln(2)$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 0$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1+\sqrt{1+x^2})}{2x} = 0$

Exercice 8

Dans tous ce qui suit; on désigne par D_f l'ensemble de définition de la fonction f

1) • Déterminons D_f où $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x > 0 \text{ et } \ln(x) \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}/x > 0 \text{ et } x \neq 1\}$

Donc : $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable en tout point de D_f et on a : $(\forall x \in D_f) : f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$

2) • Déterminons D_f où $f(x) = \dfrac{x\ln|x|}{x-1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0 \text{ et } x \neq 1\} = \mathbb{R}-\{0;1\}$

• Calculons $f'(x)$.

Soit $x \in D_f$; on a : $f(x) = \dfrac{x\ln|x|}{x-1}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{(x-1)(\ln|x|+1)-x\ln|x|}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-\ln|x|}{(x-1)^2}$

3) • Déterminons D_f où $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R}/(x+1)(x-1) > 0\} =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable en tout point de D_f

Soit $x \in D_f$; on a : $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$:

Donc : $f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x\left(\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x.\left(\frac{-2}{x^2-1}\right)$

D'où : $(\forall x \in D_f)$; $f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2x}{x^2-1}$

• Déterminons D_f où $f(x) = x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2$

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln(x) \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x \neq 1\} =]0;1[\cup]1;+\infty[$

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable en tout point de D_f

Soit $x \in D_f$; on a : $f(x) = x\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)^2$

Donc : $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)^2 + 2x\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right).\left(\frac{1}{x\ln^2(x)}\right)$

$= \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right).\left(1 - \frac{1}{\ln(x)} + \frac{2}{\ln^2(x)}\right)$

$= \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right).\left(\frac{\ln^2(x) - \ln(x) + 2}{\ln^2(x)}\right)$

D'où : $(\forall x \in D_f)$; $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right).\left(\frac{\ln^2(x) - \ln(x) + 2}{\ln^2(x)}\right)$

• Déterminons D_f.

On a : $f(x) = x^2.\sqrt{|\ln x|}$, donc: $D_f =]0;+\infty[$

Soit $x \in D_f$; on a : $\begin{cases} f(x) = x^2\sqrt{\ln(x)} \ ; x \geq 1 \\ f(x) = x^2.\sqrt{-\ln(x)} \ ; 0 < x \leq 1 \end{cases}$

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable en tout point de $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Si $0 < x < 1$

On a : $f'(x) = 2x\sqrt{-\ln(x)} + x^2\left(\frac{-1}{2x\sqrt{-\ln(x)}}\right) = \frac{4x\ln(x) - x}{2\sqrt{-\ln(x)}} = \frac{x(4\ln(x) - 1)}{2\sqrt{-\ln(x)}}$

Si $x > 1$ alors : $f'(x) = 2x\sqrt{\ln(x)} + x^2\left(\frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}\right) = \frac{x(4\ln(x) + 1)}{2\sqrt{\ln(x)}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x(4\ln(x)-1)}{2\sqrt{-\ln(x)}} ; x \in]0,1[\\ f'(x) = \dfrac{x(4\ln(x)+1)}{2\sqrt{\ln(x)}} ; x \in]1,+\infty[\end{cases}$

6) • Déterminons D_f.

On a : $f(x) = \sqrt{1-\ln(x-1)}$

Donc : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1>0 \text{ et } \ln(x-1) \leq 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x>1 \text{ et } x \leq e+1\}$

Donc : $D =]1; 1+e]$

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable en tout point de $]1; 1+e[$

et on a : $(\forall x \in]1,1+e[); f'(x) = \dfrac{\frac{-1}{x-1}}{2\sqrt{1-\ln(x-1)}} = \dfrac{-1}{2(x-1)\sqrt{1-\ln(x-1)}}$

7) • Déterminons D_f.

On a : $f(x) = x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$

Donc : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x>0 \text{ et } 1-x>0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x>0 \text{ et } x<1\} =]0;1[$

• Calculons $f'(x)$.

La fonction f est dérivable en tout point $]0;1[$

Soit $x \in]0;1[$

On a : $f'(x) = \ln(x) + 1 - \left(-\ln(1-x) + (1-x).\left(\dfrac{-1}{1-x}\right)\right)$

$= \ln(x) + 1 + \ln(1-x) + 1$

$= 2 + \ln(x) + \ln(1-x)$

8) • Déterminons D_f.

On a : $f(x) = \ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$

Donc : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2-2x+2 \geq 0 \text{ et } x-1+\sqrt{x^2-2x+2}>0\}$

On a $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2-2x+2 = (x-1)^2+1$ donc $x^2-2x+1>0$

et $x^2-2x+1 > (x-1)^2$ donc $\sqrt{x^2-2x+2} > |x-1|$

et puisque : $|x-1| \geq -(x-1)$ alors : $\sqrt{x^2-2x+2}+x-1>0$ d'où : $D_f = \mathbb{R}$

• Calculons $f'(x)$.

f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$

et on a : $(\forall x \in IR); f'(x) = \dfrac{1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x-1+\sqrt{x^2-2x+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 9

1) Déterminons D où $f(x)=\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$x\in D \Leftrightarrow 1+x\geq 0$ et $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>0$ et $1-x\geqslant 0$

$\Leftrightarrow x\geq -1$ et $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\neq 0$ et $x\leq 1$

et on a : $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}=0$ et $\sqrt{1+x}=0$

$\Leftrightarrow x=1$ et $x=-1$

et ceci est impossibles donc $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\neq 0$ pour tout x élément $[-1;1]$.

Donc : $D=[-1;1]$

2) • Étudions la dérivabilité à gauche en 1.

Soit x un élément de $]-1;1[$, on a :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-\ln\sqrt{2}}{x-1}$$

$$=\frac{1}{x-1}.\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}-1}.\frac{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}-1}{x-1}$$

On pose : $t=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}$, on a : $x\to 1^- \Leftrightarrow t\to 1^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}-1}=\lim\limits_{t\to 1^+}\frac{\ln(t)}{t-1}=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(x-1)}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{2})}-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}=-\infty$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$. Par conséquent f est non dérivable à droite en -1

• Étudions la dérivabilité à droite en (-1)

For more visit: L9ray.com CamScanner

On pose $t=-x$ on a : $x\to -1^+$ donc $t\to -1^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{t\to -1^+}\dfrac{f(-t)-f(-1)}{-t+1}=-\lim\limits_{t\to -1^+}\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}=+\infty$

(car $(\forall x\in D): f(-x)=f(x)$)

f est non dérivable à droite en -1.

3) Calculons $f'(x)$

La fonction f est dérivable en tout point de $]-1;1[$ et on a : pour tout x élément de $]-1;1[$

Donc : $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}.(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

Exercice 10

1) Dresser le tableau de variations la fonction u.

• Soit $x\in]0,+\infty[$, on a :

$u(x)=x-\ln\left(x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)=x-\ln(x)-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x}=1$ et la fonction ln est continue en 1 ; alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$. Et on a : $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)=0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\ln(X)=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(x+1)=-\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to-1^+}u(x)=+\infty$

• La fonction u est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et on a :

$(\forall x\in]-1,+\infty[);u'(x)=\dfrac{x}{x+1}$

Donc le signe de $u'(x)$ sur $]-1;+\infty[$ est celui de $x(x+1)$

x	-1		0		$+\infty$
$u'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
u	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2) Déduction :

La fonction u est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-1;0]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $(\forall x \in [0,+\infty[) ; u(x) \geq u(0)$ et $(\forall x \in]-1,0]) ; u(x) \geq u(0)$

et puisque $u(0) = 0$, alors $u(x) \geq 0$ pour tout x de $]-1;+\infty[$

En particulier $u(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$ (car $u(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n} > 0$, d'où $u\left(\frac{1}{n}\right) > 0$

et on a : $u\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow 1 > n.\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow 1 > \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$

$\Leftrightarrow \ln(e) > \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$

Donc $e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$

Exercice 11

1) a- Déterminons D où $f(x) = \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$

On a : $x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$ et $1 - \frac{1}{x} \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$ et $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

donc $D =]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

b- calculons les limites aux bornes des intervalles de D

On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \left|1 - \frac{1}{x}\right| = 1$ et la fonction ln est continue en 1 ;

donc $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} \left|1 - \frac{1}{x}\right| = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to 1} \left|1 - \frac{1}{x}\right| = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

2) a- f est dérivable sur chacun des intervalles de D

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $x \in D$, on a : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x(x-1)}$

Dressons le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
f	0	↗	$+\infty$	↘	$-\infty$	↗	0

b- Montrons que le point $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$

Si $x \in]-\infty;0[$, alors $(1-x) \in]1;+\infty[$

Si $x \in]0;1[$ alors $(1-x) \in]0;1[$

Si $x \in]1;+\infty[$ alors $(1-x) \in]-\infty;0[$ donc $(\forall x \in D);(1-x) \in D$

Soit $x \in D$; on a :

$$f(1-x)+f(x) = \ln\left|1-\frac{1}{1-x}\right| + \ln\left|1-\frac{1}{x}\right| = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

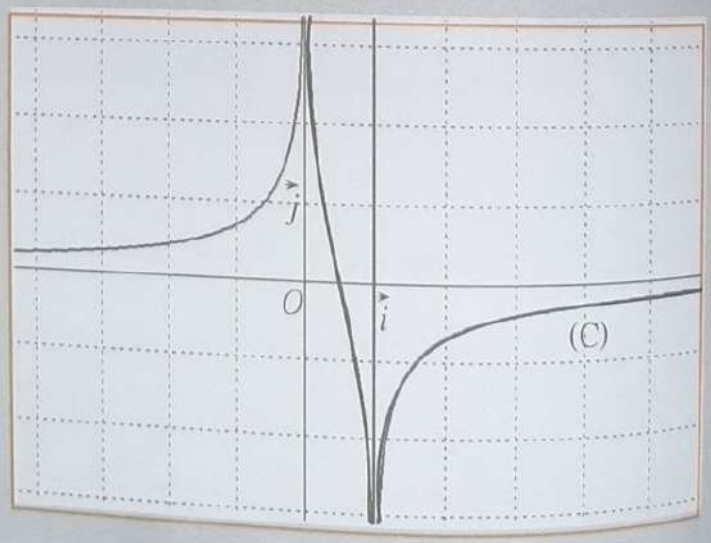
$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x}\right| = \ln(1) = 0$$

donc ; $(\forall x \in D)$; $f(1-x) = -f(x)$

d'où le point $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$

3) Construction

- Les droites d'équation respective : $x=0$, $x=1$ et $y=0$ sont des asymptotes



For more visit: L9ray.com
CamScanner

Exercice 12

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{\ln(x)} + \ln(|\ln(x)|)$ et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

c- Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$.

2) a- Montrer que : $(\forall x \in D); f'(x) = \frac{-1+\ln(x)}{x(\ln(x))^2}$

b- Dresser le tableau de variations de f.

3) a- Montrer que : $(\forall x \in D); f''(x) = \frac{\ln(x).(2-(\ln x)^2)}{(x\ln^2(x))^2}$

b- Déterminer les points d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C})$.

4) Construire $(\mathscr{C})$

Exercice 13

1ère Partie: Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = \ln(\ln(x)) - \frac{x+1}{x\ln(x)}$$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction g puis calculer les limites aux bornes de D.

2) Etudier les variations de g.

3) a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $6,4 < \alpha < 6,5$.

b- En déduire le signe de $g(x)$ sur D.

2ème partie: On considère la fonction numérique f définie sur $([1;+\infty[-\{e\})$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{\ln(\ln(x))}; x > 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a- Montrer que f est continue à droite en 1

For more visit: L9ray.com CamScanner

b- Etudier la dérivabilité de f à dr en 1, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2) a- Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b- Calculer : $\lim_{x\to} f(x)$ et $\lim_{x\to} f(x)$.

3) Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$.

4) a- Dresser le tableau de variations de f.

b- Construire la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 14

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(1-x)}}{1-x}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a- Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f.

b- Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$

2) Etudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) a- Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de $D - \{0\}$, puis dresser le tableau de variations de f.

b- Construire la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 15

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln((\sqrt{x-1}-1)^2)$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f et calculer ses limites aux bornes de D.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Etudier les variations de f.

4) a- Etudier les branches infinies.

b- Etudier la concavité de $(\mathscr{C})$.

5) a- Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 5

b- Construire $(\mathscr{C})$ et (T).

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 16

1ère partie:

Soit g la fonction numérique définie sur $I=[-1,0[\cup]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{(x+1)^2}{x(x+2)}-\ln|x(x+2)|$$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction g

2) a- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle : $]0,+\infty[$

b- En déduire le signe de $g(x)$ sur I.

2ème partie:

Soit f la fonction numérique définie sur $D=\mathbb{R}-\{-2;0\}$ par:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln|x(x+2)|}{(x+1)^2} ; x\neq -1 \\ f(-1)=-1 \end{cases}$$

et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Montrer que la droite (Δ) d'équation $x=-1$ est un axe de symétrie pour $(\mathscr{C}_f)$.

2) a- Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

b- Montrer que la fonction f est continue en -1 (on peut utiliser le résultat suivant : $\left(\forall t\in\left]0,\frac{1}{4}\right[\right), -\frac{t^2}{2}-t^3\leqslant \ln(1-t)+t\leqslant -\frac{t^2}{2}$

4) a- Montrer que : $(\forall x\in I-\{-1\}) ; f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}.g(x)$.

b- Vérifier que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha+2)}$ puis dresser le tableau de variations de f sur D.

5) a- Déterminer les points d'intersection de $(O;\vec{i})$ avec la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

b- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ (on prend : $\alpha\simeq 1,14$ et $f(\alpha)\simeq 0,28$).

Exercice 17

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1=1 \\ (\forall n\in\mathbb{N}^*) ; (u_{n+1})^2=4u_n \end{cases}$

1) Ecrire u_2 et u_3 en fonction de 2^α où $\alpha\in Q$

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) ; v_n=\ln(u_n)-\ln(4)$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b- En déduire u_n en fonction de n.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 18

On considère les foncions numériques u et v définies par : $u(x) = x - 1 - \ln x$ et $v(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2} + \ln(x)$

1) a- Dresser les tableaux des variations des fonction u et v.

b- En déduire que : $(\forall a \in]0; +\infty[) ; a - \frac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

a- Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{12}.\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}\right) < \ln(P_n) < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

b- En déduire $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

Exercice 19

On considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}.\ln($

où $n \in \mathbb{N}^*$

1) Dresser le tableau de variations de f_n

2) a- Montrer que : $(\exists! \alpha_n \in]0, +\infty[), f_n(\alpha_n) = 0$

b- Montrer que : $1 \leqslant \alpha_n < e^2$

c- Vérifier que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}.\alpha_n$

3) Ecrire $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et n, puis déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$

4) a- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente . On pose $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell$

b- Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n)$

Exercice 20

1) On considère la suite numérique (un) définie par : $(\forall n \in IN^*) ; u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

a- Calculer u_1, u_2 et u_3.

b- Montrer que : $(\forall x \in [0, +\infty[) ; \ln(1+x) \leq x$ et $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$

En déduire que : $(\forall k \in IN^*) ; \frac{1}{1+k} \leq \ln(1+k) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

c- Montrer que : $(\forall n \in IN^*) ; u_{n+1} - 1 \leq \ln(1+n) \leq u_n$; en déduire que :

$(\forall n \in IN^*) ; \ln(1+n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$

d- Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2) On considère la suite numérique (cn) définie par :

$(\forall n \in IN^* - \{1\}) ; c_n = u_{n-1} - \ln(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)$

a- Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Calculer cn+1-cn, et en déduire la monotonie de la suite (cn).

For more visit: L9ray.com CamScanner

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$; $c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$

c- En déduire que la suite (c_n) est convergente (le nombre $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \gamma$, appelé la constante d'Euler et on a $\gamma \simeq 0,577215...$).

Exercice 21 n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f_n(x) = x + n(1 + \ln x)$

1) a- Dresser le tableau de variations de la fonction f_n.

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]0;+\infty[)\,;\, f_n(\alpha_n) = 0$

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, \frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$

b- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Exercice 22 n est un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f_n(x) = nx^2 + \ln(x)$

1) Montrer que : $(\forall n \geq 2);(\exists! \alpha_n \in]0;+\infty[)\,;\, f_n(\alpha_n) = 0$

2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a- Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,;\, x - \frac{1}{2}\ln(x) > 0$

b- Montrer que : $(\forall n \geq 2)\,;\, \alpha_n < n^{-\frac{1}{4}}$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

c- Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$

Exercice 23 n est un entier naturel.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f_n(x) = x - n\ln(x)$

1) Montrer que si : $n \geq 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement 2 solutions a_n et b_n telles que : $0 < a_n < n < b_n$.

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

3) a- Montrer que : $(\forall n \geq 3)\,;\, 1 < a_n < 2$

b- Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c- Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 24

Soit n est un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$, on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = -x^2 + 2 + n\ln(x)$

1) a- Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

b- Etudier les variations de f_n.

2) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x + 2 - x$

3) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$; puis étudier les variations de g.

b- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ; g(x) > 0$

3) a- Montrer que : $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$

b- En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n dans $\mathbb{R}_+^*$ (On suppose que : $u_n < v_n$).

c- Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

4) a- Montrer que : $(\forall n \geq 2)\ ; u_n \leq 1$

b- Vérifier que : $(\forall n \geq 2)\ ; f_{n+1}(u_n) = \ln(u_n)$

c- Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et convergente.

d- Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 25

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a- Montrer que la fonction f est continue à droite en $x_0 = 0$.

b- Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 0$, et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) Soit u et v les fonctions définies sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$u(t) = t - \ln(1+t)$ et $v(t) = t^2$

a- Montrer que : $(\forall t > 0);(\exists c \in]0;t[)\ ; \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$

Appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[0;t]\ (t > 0)$ à la fonction :

$\varphi : x \mapsto u(t)v(x) - u(x)v(t)$

b- En déduire que : $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) Montrer que la droite d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

4) a- Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) = x\left(2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$

b- Montrer que : $(\forall x > 0) ; \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$

En déduire que : $f'(x) > 0$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$.

c- Dresser le tableau de variations da la fonction f.

5) a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en $\ln(2)$ et calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$.

c- Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f^{-1}(x)}{x} = +\infty$

d- Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f^{-1}(x) > x$

6) Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C})$ et la courbe $(\mathscr{C}')$ de f^{-1}.

Exercice 26

A/ 1) Montrer que :

$$(\forall x > -1) ; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

B/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} ; x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \text{ et } f(-1) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a- Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

b- Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c- Montrer que la fonction f est dérivable en 0, puis déterminer une équation de tangente à la courbe (C) au point $A(0;1)$.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, donner une interprétation géométrique

For more visit: L9ray.com CamScanner

au résultat obtenu.

b- Montrer que la fonction f est dérivable sur les intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

3) a- Montrer que : $(\forall x>-1);(x+1)\ln(x+1)-x\geq 0$

b- Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c- Tracer la courbe (C).

4) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=e \\ (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

a- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>e-1$

b- Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=e-1$.

Exercice 27

I/ On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$g(x)=-x\ln(x)+2x-2$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Montrer que g est strictement croissante sur $]0;e]$ et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$.

3) a- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $]e;+\infty[$ et que $4<\alpha<5$ (On donne : $\ln 2<\frac{3}{4}$ et $\ln 5>\frac{8}{5}$)

b- En déduire que g est positive sur $[1;\alpha]$ et négative sur $]0;1]$ et sur $[\alpha;+\infty[$ (Remarquer que : $g(1)=0$)

II/ Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln^2(x)}{x-1} & ;x\neq 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$

1) a- Montrer que f est continue en 1.

b- Montrer que f est dérivable en 1.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) a- Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[-\{1\});f'(x)=\dfrac{\ln(x)}{x(x-1)^2}\times g(x)$

b- Montrer que : $f(\alpha)=4\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\right)$

c- Montrer que : $f(\alpha)\in]0;1[$

d- Montrer que f est strictement croissante sur $]0;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

III/ Soit F la fonction primitive de f sur $]0;+\infty[$ telle que : $F(\alpha)=\alpha$.

1) Montrer que F est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement

For more visit: L9ray.com CamScanner

croissante sur $[1;+\infty[$.

2) Montrer que : $(\forall x \in]0;\alpha]) ; F(x) \geq x$

3) Montrer que : $(\exists c \in]1;\alpha[) ; \alpha - F(1) = f(c)(\alpha - 1)$

4) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = c$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; c \leq u_n \leq \alpha$

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

c- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $(\forall (x;y) \in ([c;\alpha])^2) ; |F(x) - F(y)| \leq f(\alpha)|x - y|$

d- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (f(\alpha))^n (\alpha - c)$

En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 28

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x^n . \ln(x) ; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a- Montrer que la fonction f_n est dérivable à droite en 0.

b- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a- Calculer $f_n'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f_n.

b- Etudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1})

c- Tracer, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, les courbes (C_1) et (C_2) en précisant la tangente au point O et la tangente au point $A(1;0)$.

3) a- Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, il existe un unique réel x_n dans l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$.

b- Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(x_n) > 1$

c- En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et qu'elle est convergente.

4) On pose : $b_n = x_n^n$ pour tout $n \geq 2$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

a- Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; b_n . \ln(b_n) = n$

b- Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; x - 1 \leq x \ln(x)$

c- En déduire que : $(\forall n \geq 2) ; 1 < b_n \leq n + 1$

5) a- Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$

b- Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$

Exercice 29

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln(x))^2 ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Et soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a- Montrer que la fonction f est continue à droite en $x_0 = 0$.

b- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis donner la nature de la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

2) a- Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b- Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{\ln(x)(\ln(x) + 4)}{2\sqrt{x}}$$

c- Dresser le tableau de variations de la fonction f.

d- Montrer que : $(\forall x \in [0; 1]) ; 0 \leq f(x) \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

3) a- Montrer que : $f''(x) = \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}(8 - (\ln x)^2)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b- Etudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C})$ et montrer qu'elle admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

4) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $(g^{-1})'(\sqrt{e})$

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists ! \alpha_n \in]0; +\infty[) ; g^{-1}(\alpha_n) = \dfrac{1}{n} + e$

c- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

d- Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \sqrt{e}$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 30

I/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x(1+\ln^2(x)) ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a- Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

c- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

2) a- Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) = (1+\ln(x))^2$

b- Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

d- Montrer que : $f([e^{-1};1]) \subset [e^{-1};1]$

3) a- Etudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C})$ et déterminer ses points d'inflexion s'ils existent.

b- Etudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

4) a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b- Tracer, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C})$ et la courbe (Γ) de f^{-1}.

5) Soit a et b deux nombres réels tels que : $e^{-1} < a < b$.

Montrer que : $-1+\ln^2(ea) < \dfrac{b\ln^2(b) - a\ln^2(a)}{b-a} < -1+\ln^2(eb)$

II/ On considère la suite (u_n) définie sur : $\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; e^{-1} \leq u_n < 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice 31

On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie 1:

1) Montrer que f est continue sur $]-1; +\infty[$.

2) Soit k un nombre réel non nul tel que : $|k| \leq \frac{1}{2}$ et g la fonction définie sur l'intervalle $I = [-|k|; |k|]$ par : $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

a- Montrer que g est dérivable sur l'intervalle I et que :
$(\forall x \in I) ; g'(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

b- En déduire que : $(\forall x \in I) ; |g'(x)| \leq 2k^2$

c- Montrer que : $\left|\ln(1+k) - k + \frac{k^2}{2}\right| \leq 2|k^3|$

3) Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$

4) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique de chaque résultat.

5) a- Montrer que : $(\forall x \in]-1; +\infty[) ; \dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$

b- Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$.

6) Tracer (C_f).

Partie 2:

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

For more visit: L9ray.com CamScanner

1) Montrer que : $(\forall t \in]-1;+\infty[) ; (1+t)^n \geq 1+nt$

2) On pose : $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$

a- Montrer que : $\ln(u_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$

b- Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

c- Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (n \geq 2) ; 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_n}{n}$ (On peut utiliser II)1)).

b- En déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont convergentes et ont la même limite.

4) On pose L la limite commune de $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$.

a- Montrer que : $L \geq \frac{9}{4}$

b- Déterminer la valeur de L.

Exercice 32

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x) ; x \neq -\frac{1}{2} \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a- Montrer que la fonction g est continue à droite en $-\frac{1}{2}$;

b- Etudier la dérivabilité de la fonction g à droite en $-\frac{1}{2}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$, interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a- Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

b- Dresser le tableau de variations de la fonction g.

For more visit: L9ray.com CamScanner

c- Tracer la courbe (C).

3) Soit h la restriction de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

a- Montrer que la fonction h réalise une bijection de l'intervalle $[0;+\infty[$ vers l'intervalle $]-\infty;0]$;

b- Montrer que la fonction h^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

c- Etudier la dérivabilité de la fonction h^{-1} à gauche en 0,

d- Tracer la courbe de la fonction h^{-1} dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);(\exists! \alpha_n \in]-\infty;0[);h^{-1}(\alpha_n)=\frac{1}{n}$

b- Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, puis en déduire qu'elle est convergente.

c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Partie 2:

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x};x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est continue en 0.

2) Pour tout réel non nul a de l'intervalle I, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle I par :

$$h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$$

a- Calculer $h_a(0)$, $h_a(a)$, puis en déduire qu'il existe un réel b compris strictement entre 0 et a tels que : $\dfrac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\dfrac{-2}{1+2b}$

b- En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-2$.

3) a- Montrer que la fonction f est dérivable en tout point de $I-\{0\}$ et que : $(\forall x \in I-\{0\}):f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b- Calculer $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^{+}} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, interpréter les résultats obtenus.

c- Montrer qu'il existe un réel unique α de l'intervalle $[1;2]$ tel que : $f(\alpha)=1$

d- Tracer la courbe (Γ) (on prend $\alpha \simeq 1,3$)

Partie 3:

1) On pose : $(\forall x \in I); \varphi(x) = \ln(1+2x)$ et $J=[1;\alpha]$

a- Montrer que la fonction φ est dérivable sur I et que :

$(\forall x \geq 1); 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$

b- Vérifier que : $\varphi(\alpha) = \alpha$ et que : $\varphi(J) \subset J$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \ln(1+2u_n) \end{cases}$$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in J$

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

c- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

d- En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solutions

Exercice 12

1) a- Déterminons D où $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln(|\ln(x)|)$

On a : $x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x > 0$ et $\ln(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$

donc $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$

b- Calcul des limites

On a : $\lim_{x\to 0^{+}} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ et $\lim_{x\to 0^{+}} \ln(|\ln(x)|) = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0^{+}} f(x) = +\infty$

Soit $x \in]1;+\infty[$ on a : $\ln(x) > 0$

donc : $f(x) = \frac{1}{\ln(x)} + \ln(\ln(x)) = \frac{1 + \ln(x).\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On pose : $t = \ln(x)$.

On a : $x \to 1^+ \Leftrightarrow t \to 0^+$

donc : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1 + t\ln(t)}{t} = +\infty$ (car $\lim\limits_{t \to 0^+} t\ln(t) = 0$)

• Soit $x \in]0;1[$, on a : $\ln(x) < 0$

donc $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} + \ln(-\ln(x)) = \dfrac{1 - (-\ln(x))\ln(-\ln(x))}{\ln(x)}$

On pose $t = -\ln(x)$. on a : $t \to 0^+ \Leftrightarrow x \to 1^-$

donc : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1 - t\ln(t)}{-t} = -\infty$

• Soit $x \in]1;+\infty[$, on a : $\ln(x) > 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln(x)} + \ln(\ln(x)) = +\infty$

c- Etude des branches infinies

• On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$

• On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

• Soit $x \in]1, +\infty[$

On a : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x\ln(x)} + \dfrac{\ln(\ln(x))}{x} = \dfrac{1}{x\ln(x)} + \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \cdot \dfrac{\ln(x)}{x}$

On pose $t = \ln(x)$, on a : $t \to +\infty \Leftrightarrow x \to +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$ d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

donc la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) a- Soit $x \in D$; on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{x\ln^2(x)} + \dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{-1 + \ln(x)}{x(\ln x)^2}$

b- Soit $x \in D$; on a : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1$

$\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(e)$

$\Leftrightarrow x > e$

et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

For more visit: L9ray.com CamScanner

x	0		1		e	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$ 1		$\nearrow$ $+\infty$

3) a- Soit $x \in D$

On a : $f'(x) = \dfrac{(\ln(x))^2 - (\ln(x)-1)((\ln(x))^2 + 2\ln(x))}{x^2(\ln(x))^4}$

$= \dfrac{\ln(x).[\ln(x) - (\ln(x))^2 + \ln(x) - 2\ln(x) + 2]}{(x\ln^2(x))^2} = \dfrac{\ln(x).(2-(\ln(x))^2)}{(x\ln^2(x))^2}$

b- Déterminons les points d'inflexions

Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on a : $\ln(x) \neq 0$

et on a : $2-(\ln(x))^2 > 0 \iff (\ln(x))^2 < 2$

$\iff |\ln(x)| < \sqrt{2}$

$\iff -\sqrt{2} < \ln(x) < \sqrt{2}$

$\iff e^{-\sqrt{2}} < x < e^{\sqrt{2}}$

$2-(\ln(x))^2 = 0 \iff (\ln(x))^2 = 2$

$\iff x = e^{\sqrt{2}}$ ou $x = e^{-\sqrt{2}}$

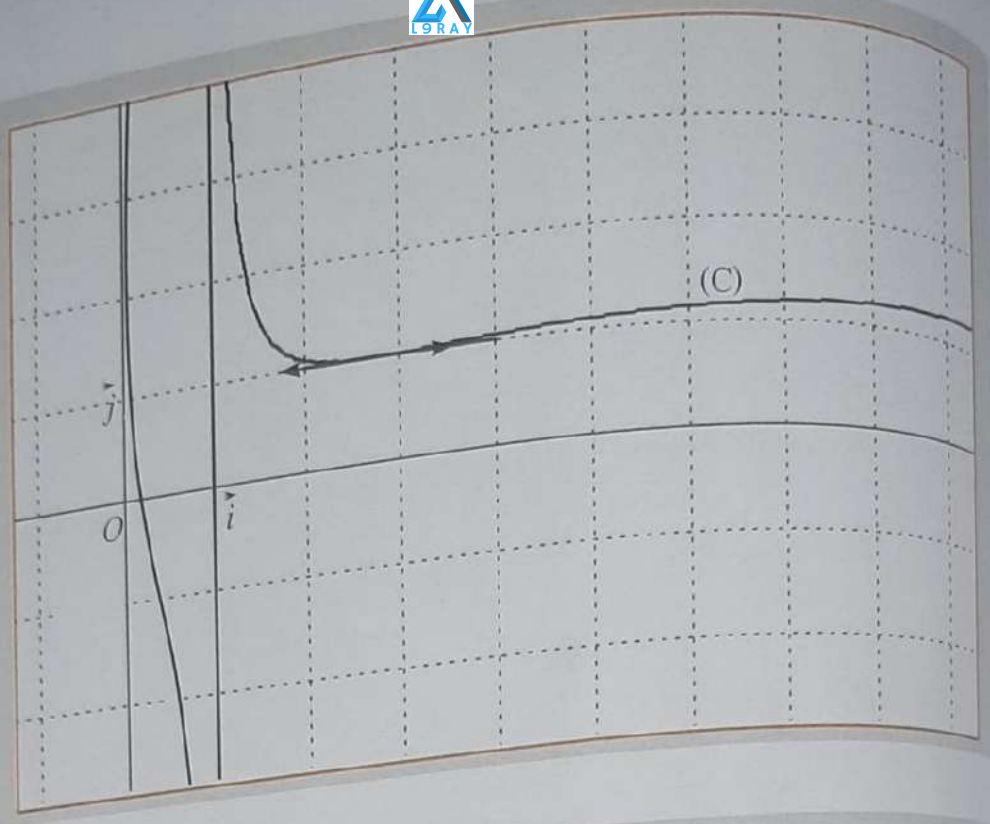
Tableau de signe de $f''(x)$

x	0		$e^{-\sqrt{2}}$		1		$e^{\sqrt{2}}$	
$\ln(x)$	$\|\|$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2-(\ln(x))^2$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f''(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$

donc f'' s'annule respectivement en $e^{\sqrt{2}}$ et $e^{-\sqrt{2}}$ en changeant de signe donc les points $A(e^{\sqrt{2}}, f(e^{\sqrt{2}}))$ et $B(e^{-\sqrt{2}}, f(e^{-\sqrt{2}}))$ sont deux points d'inflexions pour la courbe $(\mathscr{C})$.

4) Courbe

For more visit: L9ray.com CamScanner



Exercice 13

1ère partie:

1) Déterminons D où $g(x) = \ln(\ln(x)) - \dfrac{x+1}{x\ln(x)}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x > 0$ et $\ln x > 0$

$\iff x \in]1;+\infty[$

donc $D =]1;+\infty[$

• Calculons : $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

Soit $x \in]1;+\infty[$, on a : $g(x) = \dfrac{x\ln(x).(\ln(\ln x)) - (x+1)}{x\ln(x)}$

et $\lim\limits_{x\to 1^+} x\ln(x) = 0^+$, (car $x > 1 \iff \ln(x) > 0$)

et on a : $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x).\ln(\ln(x)) = \lim\limits_{t\to 0^+} t.\ln(t) = 0$ (on pose $\ln(x) = t$)

donc : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} x\ln(x).\ln(\ln(x)) - (x+1) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x\ln(x) = 0^+ \end{cases}$ par suite $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x\ln(x)}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(x)} + \dfrac{1}{x\ln(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2) On a : g est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$

For more visit: L9ray.com
CamScanner

et on a : $(\forall x \in]1;+\infty[) : g'(x) = \frac{1}{x\ln(x)} - \frac{x\ln(x)-(x+1)(\ln(x)+1)}{(x\ln(x))^2}$

$= \frac{x\ln(x)-x\ln(x)+x\ln(x)+x+\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}$

$= \frac{x\ln(x)+x+\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}$

on a : $x \in]1;+\infty[$ donc $\forall x \in]1;+\infty[\ g'(x) > 0$, d'où g est strictement croissante sur D.

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) a- On a : g est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$ donc g est une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle J tel que : $J = g(]1;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[= \mathbb{R}$

On a : $g(6,4) \simeq -0,004$ et $g(6,5) \simeq 0,01$

donc $g(6,4) \times g(6,5) < 0$, d'où il existe un réel unique α de l'intervalle $]6,4;6,5[$ tel que : $g(\alpha) = 0$

b- La fonction g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

donc : $(\forall x \in]1;\alpha[) : g(x) < g(\alpha)$ et $(\forall x \in]\alpha;+\infty[) : g(\alpha) < g(x)$

c'est-à-dire : $(\forall x \in]1;\alpha[) : g(x) < 0$ et $(\forall x \in]\alpha;+\infty[) : g(x) > 0$

(car $g(\alpha) = 0$) donc g est positive sur $]\alpha;+\infty[$ et négative sur $]1;\alpha[$

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2ème partie:

1) On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(\ln(x)) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = 2$

donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1}{\ln(\ln(x))} = 0 = f(1)$ d'où f est continue à droite en 1

For more visit: L9ray.com CamScanner

b- Soit x un élément de $]1;e[$ on a :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x+1}{(x-1)\ln(\ln(x))}=\frac{x+1}{\ln(x).\ln(\ln(x))}\times\frac{\ln x}{x-1}$$

On a : $\lim\limits_{x\to1^+}((\ln x)\times\ln(\ln(x)))=0^-$ (on pose $t=\ln(x)$) et $\lim\limits_{t\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}=1$

et $\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$, donc $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$, par suite f est non dérivable à droite en 1

• La courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale (dirigée vers le bas) au point d'abscisse 1

2) a- Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Soit $x\in]e;+\infty[$ on a : $f(x)=\frac{x+1}{\ln(\ln(x))}=\frac{1}{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}\times\left(\frac{x}{\ln(x)}+\frac{1}{\ln(x)}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}=0^+$ (on pose $t=\ln(x)$)

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln t}{t}}=+\infty$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)}=0$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b- On a : $\lim\limits_{x\to e^+}\ln(x)=1^+$ (car $x>e\iff\ln(x)>1$)

et puisque la fonction ln est continue en 1, alors $\lim\limits_{x\to e^+}\ln(\ln(x))=0^+$

et on a : $\lim\limits_{x\to e^+}(x+1)=e+1$, donc $\lim\limits_{x\to e^+}f(x)=\lim\limits_{x\to e^+}\frac{x+1}{\ln(\ln(x))}=+\infty$ de la même façon on montre que: $\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=-\infty$

3) • On a : $\lim\limits_{x\to e^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=e$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ c'est-à-dire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$.

- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

Soit $x\in]e,+\infty[$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\ln(\ln(x))}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\ln(\ln(x))}=0$$

donc la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des

For more visit: L9ray.com CamScanner

abscisses au voisinage de $+\infty$.

4) a- La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]1, e[$ et $]e, +\infty[$ et on a : $(\forall x \in (D_f - \{1\}))$;

$$f'(x) = \left(\ln(\ln(x)) - \frac{x+1}{x(\ln(x))}\right)\frac{1}{(\ln(\ln(x)))^2} = \frac{g(x)}{\ln(\ln(x))}$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ (car $\ln(\ln(x)) > 0$)

d'où le tableau de variations de f

x	1		e		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0 ↘		$+\infty$ ↘		$f(\alpha)$ ↗		$+\infty$
		$-\infty$	‖				

• Calculons $f(\alpha)$

On a : $g(\alpha) = 0 \iff \ln(\ln(\alpha)) - \dfrac{\alpha+1}{\alpha\ln(\alpha)} = 0$

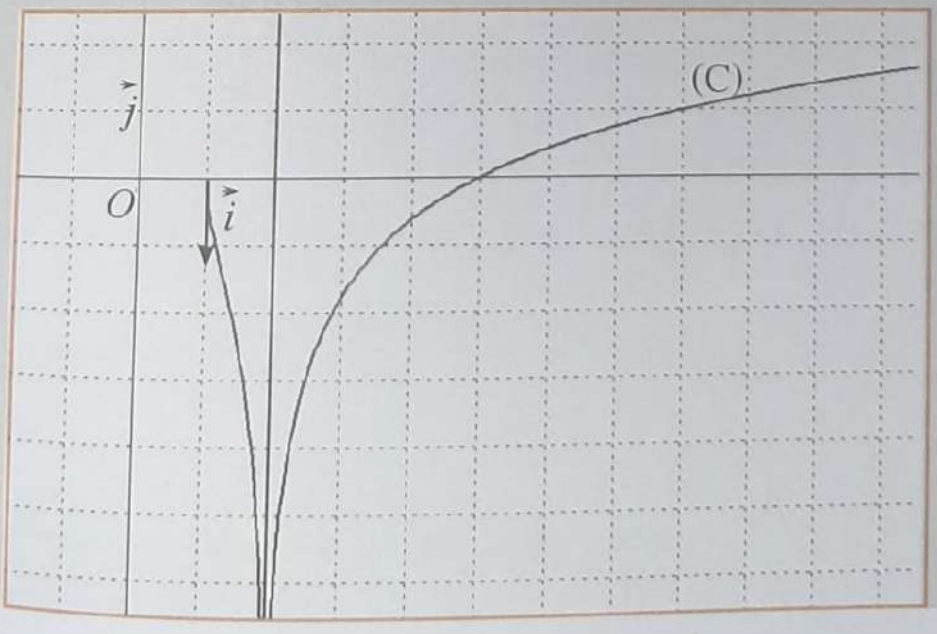
$$\iff \ln(\ln(\alpha)) = \frac{\alpha+1}{\alpha\ln(\alpha)}$$

$$\iff \frac{\alpha+1}{\ln(\ln(\alpha))} = \alpha\ln(\alpha)$$

$$\iff f(\alpha) = \alpha\ln(\alpha)$$

On prend $\alpha \simeq 6,45$ et $f(\alpha) = 11,97$

b- Construction de la courbe $(\mathscr{C})$



For more visit: L9ray.com
CamScanner

Exercice 14

1) a) Déterminons D, où $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln(1-x)}}{1-x}$

Soit $x\in\mathbb{R}$; on a :

$x\in D \Leftrightarrow 1-x>0$ et $\ln(1-x)\geqslant 0$

$\Leftrightarrow x<1$ et $1-x\geqslant 1$

$\Leftrightarrow x<1$ et $x\leqslant 0$

$\Leftrightarrow x\in\,]-\infty,0]$

donc $D=\,]-\infty,0]$.

b) Soit $x\in\,]-\infty,0]$ on a : $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln(1-x)}}{1-x}=\sqrt{\dfrac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}}$

On pose $t=1-x$ on a : $t\longrightarrow+\infty \Leftrightarrow x\to-\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(t)}{t^2}=0^+$

et puisque la fonction : $x\longrightarrow\sqrt{x}$ est continue à droite en 0,

alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}}=0$

• Déduction :

on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ donc l'axe des abscisses est une asymptote au voisinage de $-\infty$.

2) Etudions la dérivabilité de f à gauche en $x_0=0$

Soit $x\in\,]-\infty,0[$, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\sqrt{\ln(1-x)}}{x(1-x)}$

$$=-\sqrt{\frac{\ln(1-x)}{x^2}}\cdot\frac{1}{1-x}$$

$$=-\frac{1}{1-x}\cdot\sqrt{\frac{\ln(1-x)}{-x}}\cdot\frac{1}{-x}$$

On pose $t=-x$; on a : $t\to 0^+ \Leftrightarrow x\to 0^-$

donc $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1-x)}{-x}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{-x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\dfrac{\ln(1-x)}{-x}}\cdot\dfrac{1}{-x}=+\infty$ et on a :

$\lim\limits_{x\to0^-}-\dfrac{1}{1-x}=-1$

donc $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$ d'où f est non dérivable à gauche en zéro

For more visit: L9ray.com CamScanner

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale (parallèle à l'axe (oy)) au point d'abscisse 0 (dirigée vers le bas).

3) a- La fonction f est dérivable sur $]-\infty,0[$

et pour tout x de $]-\infty,0[$ on a :

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\left[\frac{-\frac{1}{1-x}}{2\sqrt{\ln(1-x)}}\cdot(1-x)+\sqrt{\ln(1-x)}\right]=\frac{1}{(1-x)^2}\left[\frac{2\ln(1-x)-1}{2\sqrt{\ln(1-x)}}\right]$$

• Le signe de $f'(x)$ est celui $2\ln(1-x)-1$

On a : $\left(f'(x)>0 \iff \ln(1-x)>\frac{1}{2}\right)$ et $\left(f'(x)=0 \iff \ln(1-x)=\frac{1}{2}\right)$

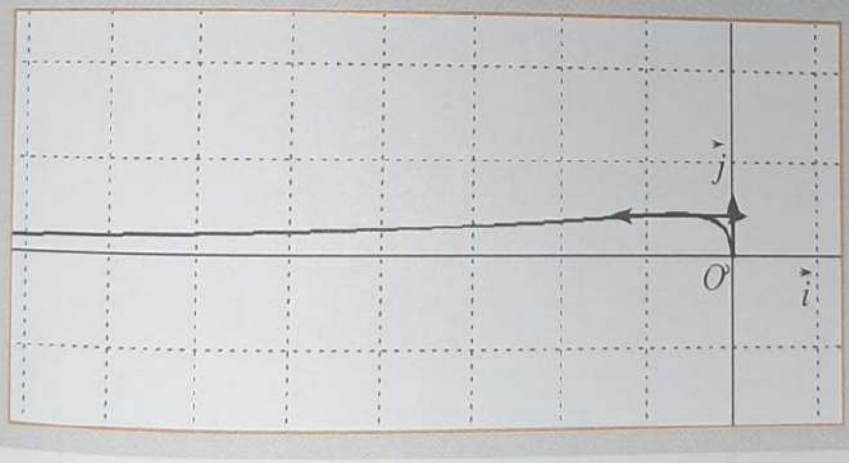
$\left(f'(x)>0 \iff \ln(1-x)>\ln(\sqrt{e})\right)$ et $\left(f'(x)=0 \iff x=1-\sqrt{e}\right)$

$f'(x)>0 \iff 1-x>\sqrt{e}$

$f'(x)>0 \iff x<1-\sqrt{e}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{e}$		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{\sqrt{2e}}{2e}$	↘	0

c- Construction de $(\mathscr{C})$



Exercice 15

1) Déterminons D, où $f(x)=\ln((\sqrt{x-1}-1)^2)$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a : $x\in D \iff \sqrt{x-1}-1\neq 0$ et $x-1\geqslant 0$

$\iff x\geqslant 1$ et $x\neq 2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

donc $D=[1,2[\cup]2,+\infty[$

- Calculons les limites de la fonction f :

• On a : $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x-1}-1)^2=0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}\ln X=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty$

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-1}-1)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) Soit x un élément de $]1;2[$

On a :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln(x-2\sqrt{x-1})}{x-1}=\frac{\ln(x-2\sqrt{x-1})}{(x-2\sqrt{x-1})-1}\times\frac{(x-2\sqrt{x-1})-1}{x-1}$$

On pose : $t=x-2\sqrt{x-1}$ on a : $x\to 1^+\iff t\to 1$

donc : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln(x-2\sqrt{x-1})}{(x-2\sqrt{x-1})-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\ln(t)}{t-1}=1$

d'autre part on a : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-2\sqrt{x-1})-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}\right)=-\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

d'où f est non dérivable à droite en 1.

Par suite la courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse 1.

3) La fonction $u:x\mapsto(\sqrt{x-1}-1)^2$ est dérivable en tout point de $(D-\{1\})$ et $u(x)>0$ pour tout x de $(D-\{1\})$, donc f est dérivable en tout point de $(D-\{1\})$

et on a : pour tout élément x de $]1,2[\cup]2,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{x-1}}.(\sqrt{x-1}-1)}{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{x-1}.(\sqrt{x-1}-1)}=\frac{(\sqrt{x-1}+1)}{\sqrt{x-1}}\times\frac{1}{x-2}$$

Tableau de variations de f

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+\infty$	$-$	‖	$+$	
f	0	↘	‖	↗	$+\infty$
		$-\infty$	‖ $-\infty$		

For more visit: L9ray.com CamScanner

4) a- On a : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Soit $x \in]2, +\infty[$ on a $\sqrt{x-1} - 1 > 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2\ln(\sqrt{x-1}-1)}{x} = \frac{2\ln(\sqrt{x-1}-1)}{\sqrt{x-1}-1} \times \frac{\sqrt{x-1}-1}{x}$$

On pose $t = \sqrt{x-1} - 1$ on a : $t \to +\infty \Leftrightarrow x \to +\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x-1}-1)}{\sqrt{x-1}-1} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}} - \dfrac{1}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

b- • Soit $x \in]1, 2[\cup]2, +\infty[$

On a: $f''(x) = -\dfrac{(x-1-\sqrt{x-1})'}{(x-1-\sqrt{x-1})^2} = \dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}(x-1-\sqrt{x-1})^2}$

$$= -\frac{4x-5}{2\sqrt{x-1}(x-1-\sqrt{x-1})^2(1+2\sqrt{x-1})}$$

Le signe de $f''(x)$ sur $]1, 2[\cup]2, +\infty[$ est celui de $5 - 4x$ donc le tableau de concavité de la courbe $(\mathscr{C})$ est le suivant:

x	1		$\frac{5}{4}$		2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	+	0	−	‖	−	
Concavité de $(\mathscr{C})$	‖	∪		∩	‖	∩	

• Point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C})$

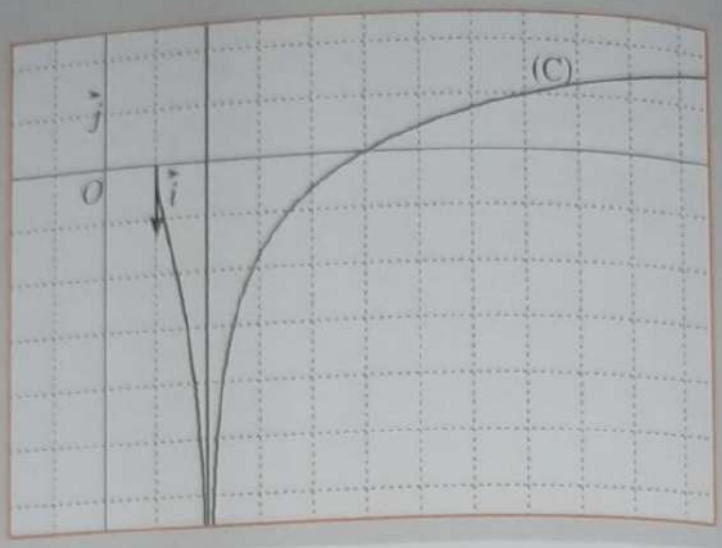
f' s'annule en $\frac{5}{4}$ en changeant de signe donc le point $A\left(\frac{5}{4}; -2\ln(2)\right)$ est un point d'inflexion de $(\mathscr{C})$

5) a) Equation de la tangente (T)

On a : $f(5) = 0$ et $f'(5) = \frac{1}{2}$ donc une équation de (T) est $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

5) Le tracé



Exercice 16

1ère partie:

Dressons le tableau de variations de g :

- On a: $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(x+1)^2 + |x(x+2)|\ln|x(x+2)|}{x(x+2)} = -\infty$

car $\lim\limits_{X\to 0^+} X\ln X = 0$ (en posant $X = |x(x+2)|$)

- On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x(x+2)} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

On a : $g(-1) = 0$

- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} |x(x+2)| = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\ln|x(x+2)|) = -\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x(x+2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

• Calculons $g'(x)$

Soit $x \in I$ on a : $g'(x) = \dfrac{2(x+1)x(x+2) - 2(x+1)^3}{x^2.(x+2)^2} - \dfrac{2x+2}{x(x+2)}$

$$= \frac{2(x+1)(x(x+2) - (x+1)^2)}{x^2(x+2)^2} - \frac{2(x+1)}{x(x+2)}$$

$$= \frac{-2(x+1)}{x^2(x+2)^2} - \frac{2(x+1)}{x(x+2)}$$

$$= \frac{-2(x+1)(1+x(x+2))}{(x(x+2))^2} = \frac{-2(x+1)^3}{(x(x+2))^2}$$

donc $(\forall x \in I); g'(x) \leqslant 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

d'où le tableau de variations de g

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$\|$	$-$	
g	0	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2) a- Soit h la restriction de g sur l'intervalle $]0,+\infty[$

La fonction h est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

donc h est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $h(]0;+\infty[)$ telle que :

$h(]0;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x); \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

Et puisque : $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un seul réel α sur l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que : $h(\alpha) = 0$

(c'est-à-dire : $(\exists!\alpha \in]0,+\infty[) / g(\alpha) = 0)$

donc l'équaion $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$

b- Déduction

La fonction g est décroissante sur l'intervalle $]-1;0]$

donc $(\forall x \in [-1;0[) ; g(x) \leqslant g(-1)$

c'est-à-dire : $(\forall x \in [-1;0[) ; g(x) \leqslant 0$

La fonction g est décroissante sur chacun des intervalles $]0;\alpha]$ et $[\alpha;+\infty[$

donc $(\forall x \in]0;\alpha]) ; g(x) \geqslant g(\alpha)$ et $(\forall x \in [\alpha;+\infty[) ; g(x) \leqslant g(\alpha)$

c'est-à-dire : $(\forall x \in]0;\alpha]) ; g(x) \geqslant 0$ et $(\forall x \in [\alpha;+\infty[) ; g(x) \leqslant 0$

d'où le tableau du signe de $g(x)$

x	-1		0		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

2ème partie:

1) soit x un élément de D tel que : $x \neq -1$ On a : $(-2+x) \in D$ et

$f(-2-x) = \dfrac{\ln|(-2-x)(-2-x+2)|}{(-2-x+1)^2} = \dfrac{\ln|-x(-2-x)|}{(-x-1)^2} = \dfrac{\ln|x(x+2)|}{(x+1)^2} = f(x)$

et $f(-2+1) = f(-1)$

donc : $(\forall x \in D) ; (-2-x) \in D$ et $f(-2-x) = f(x)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où la droite (Δ) d'équation $x=-1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

2) a- Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Soit $x\in]0,+\infty[$, on a : $x(x+2)>0$

donc $g(x)=\dfrac{\ln(x(x+2))}{(x+1)^2}=\dfrac{\ln(x(x+2))}{x(x+2)}\cdot\dfrac{x.(x+2)}{(x+1)^2}$

On pose $t=x(x+2)$ on a : $x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x(x+2))}{x(x+2)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(t)}{t}=0$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1)=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

• Calculons $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0}|x(x+2)|=0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\ln X=-\infty$

alors $\lim\limits_{x\to0}\ln|x(x+2)|=-\infty$ et on a : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{(x+1)^2}=1$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

b- Montrons que f est continue à droite en -1

Soit $x\in]-2;0[$ tel que : $x\neq-1$

on a : $f(x)=\dfrac{\ln|x^2+2x|}{(x+1)^2}=\dfrac{\ln|(x+1)^2-1|}{(x+1)^2}$

Posons $t=-(x+1)^2$ on a : $x\to-1\Leftrightarrow t\to0^-$

donc $f(x)=\dfrac{\ln|-t-1|}{-t}=\dfrac{\ln(1+t)}{-t}$ (car $-t-1=x^2+2x$ et $x^2+2x<0$ sur $]-2;0[$)

d'où $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{t\to0^-}\left(-\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right)=-\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=-1=f(-1)$ par suite f est continue à droite en -1

3) Etudions la dérivabilité de f à droite en -1

Soit $x\in\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$ on a : $x(x+2)<0$

et $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\dfrac{1}{(x+1)}\left(\dfrac{\ln(-x(x+2))}{(x+1)^2}+1\right)$

$=\dfrac{1}{x+1}\left(\dfrac{\ln(1-(x+1)^2)}{(x+1)^2}+1\right)$

$=\dfrac{\ln(1-(x+1)^2)+(x+1)^2}{(x+1)^3}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On pose $t = x+1$; on a : $x \to -1^+ \Leftrightarrow t \to 0^+$

donc: $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{\ln(1-t^2)+t^2}{t^3}$

on a : $-1 < x < -\dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire $0 < x+1 < \dfrac{1}{2}$ donc $0 < t < \dfrac{1}{2}$

d'où $0 < t^2 < \dfrac{1}{4}$ par suite : $-\dfrac{t^4}{2} - t^6 \leqslant \ln(1-t^2)+t^2 \leqslant -\dfrac{t^4}{2}$

d'où : $\left(\forall t \in \left]0;\dfrac{1}{2}\right[\right); -\dfrac{t}{2} - t^3 \leqslant \dfrac{\ln(1-t^2)+t^2}{t^3} \leqslant -\dfrac{t}{2}$

et puisque : $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\dfrac{t}{2}-t^3\right) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0}\left(-\dfrac{t}{2}\right) = 0$ alors $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln(1-t^2)+t^2}{t^3} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = 0$

finalement f est dérivable à droite en -1 et on a : $f'_d(-1) = 0$

4) a- Soit $x \in (I-\{-1\})$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^4}\left[\frac{2x+2}{x(x+2)}\cdot(x+1)^2 - 2(x+1)\ln|x(x+2)|\right]$$

$$= \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}\left[\frac{(x+1)^2}{x(x+2)} - \ln|x(x+2)|\right]$$

$$= \frac{2}{(x+1)^3}g(x)$$

donc : $\forall x \in I-\{-1\}$; $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}.g(x)$

b- On a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha(\alpha+2)} = \ln|\alpha(\alpha+2)|$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(\alpha+2)} = \frac{\ln|\alpha(\alpha+2)|}{(\alpha+1)^2} \text{ (car } \alpha \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha+2)}$$

et puisque $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}.g(x)$ pour tout x de $(I-\{-1\})$ alors, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $I-\{-1\}$, d'où le tableau de variation de f sur I.

x	-1		0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
f	-1 ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

For more visit: L9ray.com CamScanner

et on a: (Δ) est un axe de symétrie pour (Cg) donc (si on pose $t = -x-2$) on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(-2-x) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$

d'où le tableau de variations de f sur D

x	$-\infty$		$(-2-\alpha)$		-2		-1		0		α		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

5) a- Soit x un élément de D tel que $x \neq -1$, on a :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln|x(x+2)| = 0$

$\Leftrightarrow |x(x+2)| = 1$

$\Leftrightarrow x(x+2) = 1$ ou $x(x+2) = -1$

et puisque $x(x+2) = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2$

alors $x(x+1) = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$ ou $x = -\sqrt{2} - 1$

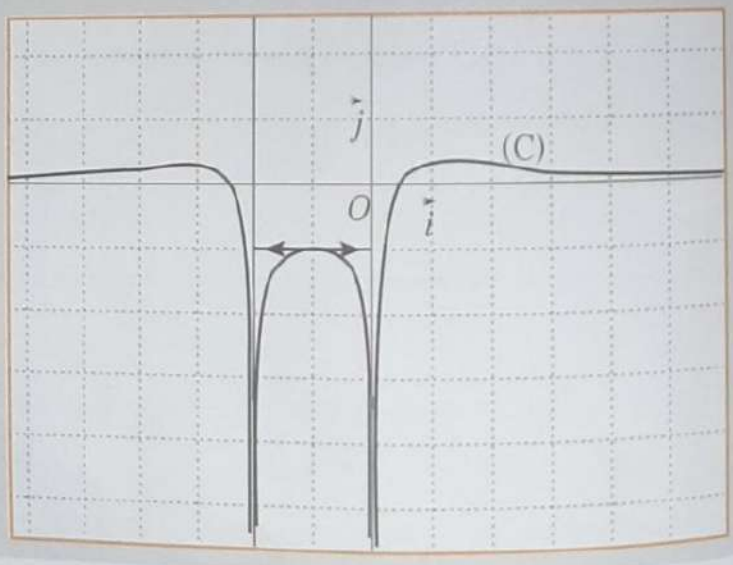
et on a : $x(x+2) = -1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$ (impossible:car $x \neq -1$)

donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$ ou $x = -\sqrt{2} - 1$

donc (C_f) coupe l'axe des abscisses aux points $A(\sqrt{2}-1;0)$ et $B(-\sqrt{2}-1;0)$

et on a: $f(-1) = -1$

b- courbe



For more visit: L9ray.com
CamScanner

Exercice 17

1) Ecrivons u_1 et u_2 en fonction de 2^n

On a $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$ par définition de la suite (u_n)

donc $(u_2)^2 = 4 \Leftrightarrow u_2 = 2$ et $(u_3)^2 = 4u_2 \Leftrightarrow (u_3)^2 = 2^3$ donc $u_2 = 2^1$ et $u_3 = 2^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow u_3 = 2^{\frac{3}{2}}$

2) a- Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - \ln 4$

et puisque $(u_{n+1})^2 = 4u_n$ alors $\ln((u_{n+1})^2) = \ln(4u_n)$, donc

$2\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + \ln 4$ c'est-à-dire $\ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2}\ln(u_n) + \frac{1}{2}\ln(4)$

d'où $v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(u_n) + \frac{1}{2}\ln(4) - \ln(4) = \frac{1}{2}\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(4) = \frac{1}{2}v_n$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ c'est-à-dire (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme

$$v_1 = \ln(u_1) - \ln(4) = -\ln 4$$

donc :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = (-\ln(4)).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (-2\ln(2)).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\ln(2) = \ln 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$

et puisque $\ln(u_n) = v_n + \ln 4$

alors : $\ln(u_n) = \ln\left(2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}\right) + \ln(2^2) = \ln\left(2^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}\right)$

donc : $u_n = 2^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = 2^{2-4\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

Exercice 18

1) Dressons le tableau de variations de la fonction u

- La fonction u est définie sur : $]0, +\infty[$
- Les limites : on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x - 1 = -1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = +\infty$

et on a : $(\forall x \in]0, +\infty[), u(x) = x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

- La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\forall x \in]0, +\infty[)$;

$u'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
u	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Dressons le tableau de variations de la fonction v.

- La fonction v est définie sur $]0,+\infty[$
- Les limites : on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2}-2x+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}v(x)=-\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}-2x+\frac{3}{2}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=+\infty$

- La fonction v est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $(\forall x\in]0,+\infty[)\,;\,v'(x)=x-2+\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$

donc : $\forall x\in]0,+\infty[-\{1\}\,;\,v'(x)>0$

Par suite v est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$v'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
v	‖ $-\infty$	↗		↗	

b- Déduction

- On a v est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Soit $a\in]0,+\infty[$ on a : $a+1>1$ donc $v(a+1)>v(1)$ et $v(1)=0$

et on a :

$$v(a+1)=\frac{1}{2}(a+1)^2-2(a+1)+\ln(a+1)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}a^2-a+\ln(a+1)$$

donc : $\ln(a+1)>a-\frac{1}{2}a^2$ (1)

- On a : u est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

Soit $a\in]0,+\infty[$, on a : $a+1>1$ donc $u(a+1)>u(1)$

et comme $u(1)=0$ et $u(a+1)=a-\ln(1+a)$ alors $a>\ln(1+a)$ (2)

de (1) et (2) on déduit que :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$(\forall a \in]0,+\infty[) ; a - \frac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a \quad (3)$$

2) a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

donc $\ln(P_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

et d'après l'inégalité double (3) et pour $a = \frac{k}{n^2}$ où $1 \leqslant k \leqslant n$ $(k \in \mathbb{N})$

on a : $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4} < \ln(1+\frac{k}{n^2}) < \frac{k}{n^2}$

donc $\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}k - \frac{1}{2n^4}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2 < \ln(P_n) < \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}k$

c'est-à-dire : $\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} < \ln(P_n) < \frac{n+1}{2n}$

Rappel :

- $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$

donc : $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12}\times\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln(P_n) < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

b- Déduction

On a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{2}$

et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln(P_n) < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

donc d'après les critères de convergence : $\lim_{n\to+\infty}\ln(P_n) = \frac{1}{2}$

Et puisque $P_n = e^{\ln(P_n)}$ alors $\lim_{n\to+\infty}P_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Exercice 19

- On a : $\lim_{x\to0^+}\ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to0^+}x - n = -n$

donc $\lim_{x\to0^+}f_n(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x - n + \frac{n}{2}\ln(x)\right) = -\infty$

Soit $x \in]0,+\infty[$; on a : $f_n(x) = x\left(1 + \frac{n}{2}\cdot\frac{\ln(x)}{x} - \frac{n}{x}\right)$

et puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{n}{2}\cdot\frac{\ln(x)}{x} - \frac{n}{x}\right) = 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{n}{2}\cdot\frac{\ln(x)}{x}-\frac{n}{x}\right) = +\infty$

Les fonctions : $x \mapsto \frac{n}{2}\ln(x)$ et $x \mapsto x - n$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc est dérivable sur $]0;+\infty[$, et on a : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; f'_n(x) = 1+\frac{n}{2x}$

donc : $f'_n(x) > 0$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$. d'où f_n est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	$+$	
f_n	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) a- Montrons que : $(\exists!\alpha_n \in]0;+\infty[)\ ; f_n(\alpha_n) = 0$

La fonction f_n est continue sur $]0;+\infty[$ (puisqu'elle est dérivable sur $]0;+\infty[$), et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc f_n est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $f_n(]0;+\infty[)$ telle que:

$f_n(]0;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\ ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

et puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors $(\exists!\alpha_n \in]0;+\infty[),\ f_n(\alpha_n) = 0$

b- Montrons que : $1 \leqslant \alpha_n < e^2$

On a : $f_n(1) = 1-n$ et $f_n(e^2) = e^2$ donc $f_n(1) \leqslant 0$ et $f_n(e^2) > 0$

d'où $f_n(1) \leqslant f_n(\alpha_n) < f_n(e^2)$ (car $f_n(\alpha_n) = 0$)

et puisque f_n est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ alors f_n^{-1} la bijection réciproque de f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc $f_n^{-1}(f_n(1)) \leqslant f_n^{-1}(\alpha_n) < (f_n^{-1}(e^2))$ c'est-à-dire $1 \leqslant \alpha_n < e^2$

c- Vérifions que : $\ln(\alpha_n) = 2-\frac{2}{n}\alpha_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a :

$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n - n + \frac{n}{2}\ln(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\ln(\alpha_n) = n-\alpha_n \Leftrightarrow \ln(\alpha_n) = 2-\frac{2}{n}\alpha_n$

donc $\ln(\alpha_n) = 2-\frac{2}{n}\alpha_n$

3) Écrivons $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f_{n+1}(x) = x-(n+1)+\frac{n+1}{2}.\ln(x)$

donc $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n-(n+1)+\frac{n+1}{2}.\ln(\alpha_n)$

et puisque: $\ln(\alpha_n) = 2-\frac{2}{n}\alpha_n$ alors :

$f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n - n - 1 + \frac{n+1}{2}\left(2-\frac{2}{n}.\alpha_n\right) = \alpha_n - n - 1 + n + 1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)\alpha_n = -\frac{\alpha_n}{n}$

donc : $f_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n}$ pour tout n de IN* .

* Déduction

On a : $f_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n}$ et $-\frac{\alpha_n}{n} < 0$ donc : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$

On a : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ donc : $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

Et puisque f_{n+1} est une fonction continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors c'est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc : $\alpha_n < \alpha_{n+1}$

4) a- Convergence de la suite (α_n).

On a : la suite (α_n)st strictement croissante (d'après la question 3) et marjorée par e^2 (d'après la question 2) b)

alors la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

b- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(\alpha_n)$

On a : $(\forall n \in IN^*)$; $\ln(\alpha_n) = 2-\frac{2}{n}.\alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{n}\right) = 0$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{2}{n}.\alpha_n\right) = 2$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(\alpha_n) = 2$

Exercice 20

1) a- Calculons u_1, u_2 et u_3

Pour tout n de IN, on a : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$

donc : $u_1=1$ et $u_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $u_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

b)Montrons que : $(\forall x \in [0,+\infty[)\ ;\ \ln(1+x) \leq x$ et $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$

On considère les fonctions numériques u et v définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+x) - x \\ v(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} \end{cases}$$

Les fonctions u etv sont dérivables sur $[0,+\infty[$, et on a :

$$\begin{cases} (\forall x \in [0,+\infty[)\ ;\ u'(x) = \dfrac{-x}{1+x} \\ (\forall x \in [0,+\infty[)\ ;\ v'(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2} \end{cases}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

donc : $u'(x) \leq 0$ et $v'(x) \geq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$. et on a :

$u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

et $v'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc : u est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et v est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

d'où: $(\forall x \in [0, +\infty[) \; ; \; u(x) \leq u(0)$ et $(\forall x \in [0, +\infty[) \; ; \; v(x) \geq v(0)$

et on a $u(0)=0$ et $v(0)=0$

donc : $(\forall x \in [0, +\infty[) \; ; \begin{cases} \ln(1+x) \leq x \\ \dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \end{cases}$

- Déduction

On a : $(\forall x \in IR^*) \; ; \; \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ (1)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On a : $\dfrac{1}{k} > 0$, et d'après l'inégalité (1) on a : $\dfrac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1} \leq \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$

c'est-à-dire : $\dfrac{1}{1+k} \leq \ln\left(\dfrac{1+k}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$, d'où : $\dfrac{1}{1+k} \leq \ln(1+k) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$

Par conséquent : $(\forall k \in IN^*) \; ; \; \dfrac{1}{1+k} \leq \ln(1+k) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$

c- Montrons que : $(\forall n \in IN^*) \; ; \; u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tout k de l'ensemble {1, 2, 3,... ,n} : on a : $\dfrac{1}{1+k} \leq \ln(1+k) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$

donc : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+k} \leq \sum_{k=1}^{n} (\ln(1+k) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

d'où : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}\right) - 1 = u_{n+1} - 1$

et : $\sum_{k=1}^{n} (\ln(1+k) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

$= \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right) + \ln(1+n) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(1+n)$

donc : $u_{n+1} - 1 \leq \ln(1+n) \leq u_n$,

d'où : $(\forall n \in IN^*) \; ; \; u_{n+1} - 1 \leq \ln(1+n) \leq u_n$

- Déduction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ d'après : $(\forall n \in IN^*) \; ; \; u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1)$

On a : $(\forall n \in IN^* - \{1\}) \; ; u_n - 1 \leq \ln(n)$ et pour n=1 : $u_1 = 1$ et $\ln(1)=0$

c'est-à-dire : $u_1 - 1 = \ln(1)$, donc : $(\forall n \in IN^*) \; ; \; u_n - 1 \leq \ln(n)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

donc: $(\forall n \in IN^*)$; $u_n \leq 1 + \ln(n)$ et on a : $(\forall n \in IN^*)$; $\ln(n+1) \leq u_n$

d'où : $(\forall n \in IN^*)$; $\ln(1+n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$

c- Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

On a : $\begin{cases} (\forall n \in IN^*) \ ; \ u_n \geq \ln(n+1) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty \end{cases}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ d'après les critères de convergence. La suite (u_n) est divergente.

2) a- Soit n un entier tel que $n \geq 2$

* Calculons $c_{n+1} c_n$

On a : $c_n = u_{n-1} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln(n)$

et $c_{n+1} = u_n - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$

donc : $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(1+n)$

* Déduction

D'après1) b)on a : $\ln(1+n) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$

donc: $\frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(1+n) \geq 0$, c'est-à-dire : $c_{n+1} - c_n \geq 0$

d'où : $(\forall n \in IN^* - \{1\})$; $c_{n+1} \geq c_n$, par conséquent la suite $(c_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

b- Montrons que : $(\forall n \in IN^* - \{1\})$; $c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

D'après 1) c) on a $(\forall n \in IN^*)$; $\ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$

donc : $0 < \ln(n) \leq u_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$ pour tout n de $IN^* - \{1\}$

donc : $u_{n-1} - \ln(n) \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$ c'est-à-dire :

$c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$

d'où : $(\forall n \in IN^* - \{1\})$; $c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$

c- Déduction

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. on a :

$\ln(n-1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

et puisque : $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$ alors $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$ donc : ln(n-1)-ln(n)<0

et on a : $c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$ donc : $(\forall n \in IN^* - \{1\})$; $c_n \leq 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Par suite la suite $(c_n)_{n\geq 2}$ est majorée par 1. Et puisque $(c_n)_{n\geq 2}$ est croissante, alors $(c_n)_{n\geq 2}$ est une suite convergente.

Exercice 21

1) a- Dressons le tableau de variations de la fonction f_n :

La fonction f_n est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x)=x+n(1+\ln x)$

• Calcul de $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x+n(1+\ln x)=-\infty$, car $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+n(1+\ln x)=+\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

• La dérivée de f_n :

La fonction f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$, et que :

$(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ f_n'(x)=1+\dfrac{n}{x}$

• On a pour tout $x\in]0;+\infty[\ ;\ f_n'(x)>0$, d'où le tableau de variations de f_n est :

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	
f_n	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

b- Montrons que $(\forall n\in\mathbb{N}^*);(\exists!\alpha_n\in]0;+\infty[)\ ;\ f_n(\alpha_n)=0$:

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur l'intervalle $f_n(]0;+\infty[)$ avec

$f_n(]0;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$

Et puisque $0\in\mathbb{R}$ alors il existe un unique α_n de $]0;+\infty[$ tel que :

$f_n(\alpha_n)=0$

Ainsi : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);(\exists!\alpha_n\in]0;+\infty[)\ ;\ f_n(\alpha_n)=0$

2) a- Montrons que: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \dfrac{1}{e^2}<\alpha_n<\dfrac{1}{e}$:

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $f_n\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}+n(1-1)=\dfrac{1}{e}$

et $f_n\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{1}{e^2}+n(1-2)=\dfrac{1}{e^2}-n=\dfrac{1-ne^2}{e^2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Comme $ne^2 > 1$ alors : $1 - ne^2 < 0$ donc: $f_n\left(\frac{1}{e}\right) > 0$ et $f_n\left(\frac{1}{e^2}\right) > 0$

Donc : $f_n\left(\frac{1}{e^2}\right) < 0 < f_n\left(\frac{1}{e}\right)$, c'est-à-dire : $f_n\left(\frac{1}{e^2}\right) < f_n(\alpha_n) < f_n\left(\frac{1}{e}\right)$

Et comme la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $\frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$

b- • Déterminons la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n + n(1 + \ln(\alpha_n)) + 1 + \ln(\alpha_n) = 1 + \ln(\alpha_n)$

Car $f_n(\alpha_n) = 0$ équivaut à $\alpha_n + n(1 + \ln(\alpha_n)) = 0$

Et puisque : $\frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$ alors : $\ln(\alpha_n) + 1 < 0$

Par suite : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ c'est-à-dire : $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

Par conséquent : $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ car f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n < \alpha_{n+1}$

signifie que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

• La convergence de la suite (α_n) :

La suite (α_n) est croissante et majorée par le réel $\frac{1}{e}$ donc elle est convergente.

• Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$:

On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{N}$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$ alors : $\frac{1}{e^2} \leq \ell \leq \frac{1}{e}$, d'après les propriétés de limites et ordre.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f_n(\alpha_n) = 0 \iff \frac{\alpha_n}{n} = -1 - \ln(\alpha_n)$

En plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell$

D'autre part, la fonction $\ln$ est continue en ℓ et la suite (α_n) est convergente vers ℓ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = \ln(\ell)$

Et comme : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{\alpha_n}{n} = -1 - \ln(\alpha_n)$

alors : $0 = -1 - \ln(\ell)$ équivaut à : $\ln(\ell) = -1$ donc : $\ell = \frac{1}{e}$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{e}$

Exercice 22

1) Montrons que : $(\forall n \geq 2);(\exists! \alpha_n \in]0; +\infty[) ; f_n(\alpha_n) = 0$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction f_n est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = nx^2 + \ln(x)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Calcul de $\lim_{x\to 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$:

$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} nx^2 + \ln x = -\infty$; car $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} nx^2 + \ln x = +\infty$; car $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

• La monotonie de f_n :

$(\forall x \in]0;+\infty[) ; f_n'(x) = 2nx + \frac{1}{x}$, donc : $f_n'(x) > 0$ pour tout réel $x \in]0;+\infty[$.

Par suite la fonction f_n est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

• La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ alors c'est une bijection de $]0;+\infty[$ sur l'intervalle $f_n(]0;+\infty[) =]\lim_{x\to 0^+} f_n(x); \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

Et puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel $\alpha_n \in]0;+\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$.

Ainsi : $(\forall n \geq 2)(\exists! \alpha_n \in]0;+\infty[) ; f_n(\alpha_n) = 0$

2) • Montrons que la suite (α_n) est strictement décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq 2$; on a:

$f_{n+1}(\alpha_n) = (n+1)\alpha_n^2 + \ln(\alpha_n) = n\alpha_n^2 + \ln(\alpha_n) + \alpha_n^2 = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^2 = \alpha_n^2$

or $\alpha_n^2 > 0$ donc : $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ (car $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$)

Et comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ alors : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$

Ainsi : $(\forall n \geq 2) ; \alpha_{n+1} < \alpha_n$

signifie que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

• Déduction :

La suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et minorée par le réel 0 donc elle est convergente.

3) a- Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; x - \frac{1}{2}\ln(x) > 0$

On considère la fonction φ définie sur $]0;+\infty[$ par : $\varphi(x) = x - \frac{1}{2}\ln(x)$

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{2x} = \frac{2x-1}{x}$

Donc : la fonction φ est décroissante $]0;\frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2};+\infty[$.

Donc : $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

Et $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

C'est-à-dire : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; \varphi(x) \geq \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

Or $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}(1+\ln(2))$ et $1+\ln(2) > 0$

Donc : $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

Ainsi : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; x - \frac{1}{2}\ln(x) > 0$

b- Montrons que : $(\forall n \geq 2) ; \alpha_n < n^{-\frac{1}{4}}$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, on a :

$f_n(n^{-\frac{1}{4}}) = n \times n^{-\frac{1}{2}} + \ln(n^{-\frac{1}{4}}) = n^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\ln(n^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{n} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{n})$

Et comme $\sqrt{n} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{n}) > 0$ d'après la question précédente,

alors : $f_n(n^{-\frac{1}{4}}) > f_n(\alpha_n)$ et la fonction f_n est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Donc : $n^{-\frac{1}{4}} > \alpha_n$

Ainsi : $(\forall n \geq 2) ; \alpha_n < n^{-\frac{1}{4}}$

• Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$:

On a : $(\forall n \geq 2) ; 0 < \alpha_n < n^{-\frac{1}{4}}$

Et comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{4}} = 0$ (car $-\frac{1}{4} < 0$ et $-\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}^+$)

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, d'après les critères de convergence.

c- Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$

Soit $n \geq 2$; on a : $f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln(\alpha_n) = -\alpha_n^2 \Leftrightarrow \ln(\sqrt[n]{\alpha_n}) = -\alpha_n^2$

Donc : $\sqrt[n]{\alpha_n} = e^{-\alpha_n^2}$ pour tout $n \geq 2$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\alpha_n^2} = e^0 = 1$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$

Exercice 23

Soit n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1) Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que : $0 < a_n < n < b_n$:

La fonction f_n est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = x - n\ln(x)$

• Calcul de $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$:

$\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x - n\ln(x) = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - n\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Les variations de la fonction f_n :

La fonction f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, qui sont : $x \mapsto x$ et $x \mapsto -n\ln(x)$

Et que : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$

Et on a : • $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = n$ • $f_n(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]n;+\infty[$

Donc la fonction f_n est strictement décroissante sur $]0;n]$ et strictement croissante sur $[n;+\infty[$.

• Soit φ_1 la restriction de la fonction f_n sur $]0;n[$.

La fonction φ_1 est continue et strictement décroissante sur $]0;n[$, donc c'est une bijection de $]0;n[$ sur l'intervalle $\varphi_1(]0;n[)$ où

$\varphi_1(]0;n[) =]n - n\ln(n);+\infty[$

Et comme $n - n\ln(n) = n(1-\ln(n)) < 0$ (car $n \geq 3 \geq e \Rightarrow \ln(n) > 1$)

Alors : $0 \in]n - n\ln(n);+\infty[$

Donc il existe un unique antécédent $a_n \in]0;n[$ tel que : $\varphi_1(a_n) = 0$

Ainsi : $(\forall n \geq 3);(\exists! a_n \in]0;n[) ; f_n(a_n) = 0$

• Soit φ_2 la restriction de la fonction f_n sur $]n;+\infty[$:

La fonction φ_2 est continue et strictement croissante sur $]n;+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]n;+\infty[$ sur l'intervalle $]n - n\ln(n);+\infty[$.

Puisque : $0 \in]n - n\ln(n);+\infty[$, alors il existe un unique réel $b_n \in]n;+\infty[$ tel que : $\varphi_2(b_n) = 0$

Ainsi : $(\forall n \geq 3);(\exists! b_n \in]n;+\infty[) ; f_n(b_n) = 0$

Finalement si $n \geq 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que : $0 < a_n < n < b_n$

2) Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$:

On a : $(\forall n \geq 3) ; b_n > n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

3) a- Montrons que : $(\forall n \geq 3) ; 1 < a_n < 2$

Soit $n \geq 3$, on a : $f_n(1) = 1$ et $f_n(2) = 2 - n\ln(2) = 2 - \ln(2^n) = \ln\left(\frac{e^2}{2^n}\right)$

Donc : $f_n(2) < 0 < f_n(1)$ c'est-à-dire : $f_n(2) < f_n(a_n) < f_n(1)$

Comme la fonction f_n est strictement décroissante sur $]0;n[$ alors : $1 < a_n < 2$

Ainsi : $(\forall n \geq 3) ; 1 < a_n < 2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b- Montrons que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante :

Soit $n \geq 3$, on a : $f_{n+1}(a_n) = a_n - (n+1)\ln(a_n) = f_n(a_n) - \ln(a_n) = -\ln(a_n)$

Comme $a_n > 1$ alors : $\ln(a_n) > 0$, donc : $f_{n+1}(a_n) < 0$

Par suite : $f_{n+1}(a_n) < f_{n+1}(a_{n+1})$

Il s'ensuit que : $a_{n+1} < a_n$; car la fonction de f_{n+1} est strictement décroissante sur $]n+1;+\infty[$.

Ainsi : $(\forall n \geq 3)\,; a_{n+1} < a_n$, signifie que la suite (a_n) est décroissante.

• La suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante minorée par le réel 0, donc elle est convergente.

c- Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$

On a : $(\forall n \geq 3)\,; 1 \leq a_n < 2$ alors : $\ell \in [1;2]$

Pour $n \geq 3$, on a : $f_n(a_n) = 0$ équivaut à : $\dfrac{a_n}{n} = \ln(a_n)$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n) = \ln(\ell)$, (car la suite (a_n) est convergente vers ℓ et la fonction $\ln$ est continue en ℓ

alors : $\ln(\ell) = 0$ c'est-à-dire : $\ell = 1$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

Exercice 24

1) a- Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$:

• On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} 2 - x^2 = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} n\ln x = -\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} 2 - x^2 + n\ln x = -\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty$

• On a : $f_n(x) = 2 + x\left(-x + n\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + n\dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + x\left(-x + n\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = -\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$

b- Étudions les variations de f_n :

La fonction f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\,; f_n'(x) = -2x + \frac{n}{x} = \frac{n-2x^2}{x}$$

Le signe de $f_n'(x)$ est celui de $n - 2x^2$ sur $]0;+\infty[$, donc :

• $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• $f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right[$

• $f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\sqrt{\frac{n}{2}};+\infty\right[$

Par conséquent la fonction f_n est strictement croissante sur $\left]0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}};+\infty\right[$

2) a- • Calculons $g'(x)$ où $x \in]0;+\infty[$:

La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$(\forall x \in]0;+\infty[) ; g'(x) = (x\ln(x)+2-x)' = \ln(x)$

Par suite : • $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

• $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1;+\infty[$

• $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0;1[$

Par conséquent la fonction g est croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]0;1]$.

b- Déduction :

On a : $(\forall x \in [1;+\infty[) ; g(x) \geq g(1)$; car g est croissante.

Et $(\forall x \in]0;1]) ; g(x) \geq g(1)$; car g est décroissante.

Et comme $g(1) = 1$ alors : $g(1) > 0$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; g(x) > 0$

3) a- Montrons que : $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$

On a : $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = -\frac{n}{2} + 2 + n\ln\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = -\frac{n}{2} + 2 + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{n}{2}\right) = g\left(\frac{n}{2}\right)$

et $g\left(\frac{n}{2}\right) > 0$

Donc : $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$

b- Déduisons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n dans $\mathbb{R}_+^*$ $(u_n < v_n)$:

• Soit φ_1 la restriction de f_n sur $\left]0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

La fonction φ_1 est continue et strictement croissante sur $\left]0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$, donc elle réalise une bijection de $\left]0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ sur $\varphi_1\left(\left]0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]\right)$ tel que :

$\varphi_1\left(\left]0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]\right) = \left]\lim_{x\to 0^+}\varphi_1(x);\varphi_1\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right] = \left]-\infty ; f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]$

Puisque : $0 \in \left]-\infty;f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]$ alors il existe un unique réel u_n dans $\left]0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ tel que : $f_n(u_n) = 0$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Soit φ_2 la restriction de f_n sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}};+\infty\right[$.

La fonction φ_2 est continue et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}};+\infty\right[$, donc elle réalise une bijection de $\left[\sqrt{\frac{n}{2}};+\infty\right[$ sur $\varphi_2\left(\left[\sqrt{\frac{n}{2}};+\infty\right[\right)$ tel que :

$\varphi_2\left(\left[\sqrt{\frac{n}{2}};+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_1(x);\varphi_1\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]=\left]-\infty;f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]$

Puisque : $0\in\left]-\infty;f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]$ alors : $\left(\exists v_n\in\left[\sqrt{\frac{n}{2}};+\infty\right[\right)$ tel que : $f_n(v_n)=0$

c- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$:

On a : $(\forall n\geq 2)\,;v_n\geq\sqrt{\frac{n}{2}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n=+\infty$

4) a- Montrons que : $(\forall n\geq 2)\,;u_n\leq 1$

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$, on a : $f_n(1)=1$ alors : $f_n(1)\geq f_n(u_n)$ et puisque $\sqrt{\frac{n}{2}}\geq 1$ et la fonction f_n est croissante sur $\left]0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$, alors : $1\geq u_n$

D'où : $(\forall n\geq 2)\,;u_n\leq 1$

b- Vérifions que : $(\forall n\geq 2)\,;f_{n+1}(u_n)=\ln(u_n)$

Soit $n\geq 2$; on a : $f_{n+1}(u_n)=-u_n^2+2+(n+1)\ln(u_n)$

$=-u_n^2+2+n\ln(u_n)+\ln(u_n)$

$=f_n(u_n)+\ln(u_n)=\ln(u_n)$

Donc : $(\forall n\geq 2)\,;f_{n+1}(u_n)=\ln(u_n)$

c- Montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante :

Soit $n\geq 2$; on a : $f_{n+1}(u_n)=\ln(u_n)$ et comme $0<u_n<1$

alors : $\ln(u_n)<0$

Donc : $f_{n+1}(u_n)<0$ c'est-à-dire : $f_{n+1}(u_n)<f_{n+1}(u_{n+1})$

Et puisque la fonction f_{n+1} est croissante sur $\left]0;\sqrt{\frac{n+1}{2}}\right]$

Alors : $u_n\leq u_{n+1}$

Ainsi : $(\forall n\geq 2)\,;u_n\leq u_{n+1}$

signifie que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

Et comme elle est majorée par 1 alors elle est convergente.

d- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

Posons : $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ où $\ell\in\mathbb{R}$

On a : $(\forall n\geq 2)\,;u_2\leq u_n\leq 1$ alors : $0<u_2<\ell\leq 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et $f_n(u_n)=0 \Leftrightarrow \ln(u_n)=\frac{u_n^2}{n}-\frac{2}{n}$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n^2}{n}-\frac{2}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\ln(\ell)$ car la suite (u_n) converge vers $\ell\in]0;1]$ et la fonction ln est continue en ℓ.

Alors : $\ln(\ell)=0$ d'où : $\ell=1$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

Exercice 25

1) a- Montrons que la fonction f est continue à droite en $x_0=0$:

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a :

$f(x)=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x^2(\ln(x+1)-\ln(x))=x^2.\ln(x+1)-x^2.\ln(x)$

Et comme $\lim\limits_{x\to0^+}x+1=1$ alors : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x+1)=\ln(1)=0$

Par suite : $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln(x+1)=0$

Et on a : $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln(x)=0$, il s'ensuit que : $\lim\limits_{x\to0^+}x^2.\ln(x+1)-x^2\ln(x)=0$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ signifie que f est continue à droite en 0.

b- Étudions la dérivabilité à droite en 0:

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $f(0)=0$

et $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\ln(1+x)-x\ln(x)$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(1+x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)=0$

alors : $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(1+x)-x\ln(x)=0$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

D'où, la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$

- **Interprétation graphique :**

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente horizontale à droite en son point d'abscisse 0.

c- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$:

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $f(x)=x^2.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

On pose : $X=\frac{1}{x}$ alors : $x\to+\infty\Leftrightarrow X\to0^+$

Par suite : $f(x)=\frac{1}{X^2}.\ln(1+X)=\frac{1}{X}.\frac{\ln(1+X)}{X}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Comme $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{1}{X}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$ alors : $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{1}{X}\times\frac{\ln(1+X)}{X}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{1}{X}\times\frac{\ln(1+X)}{X}=+\infty$

2) a- Montrons que $(\forall t>0);(\exists c\in]0;t[);\frac{u(t)}{v(t)}=\frac{u'(c)}{v'(c)}$:

Les fonctions $u:t\mapsto t-\ln(1+t)$ et $v:t\mapsto t^2$ sont dérivables sur $]-1;+\infty[$ donc la fonction $\varphi:x\mapsto u(t)v(x)-u(x)v(t)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ où $t\in]-1;+\infty[$ donné.

Il s'ensuit que : • La fonction φ est continue sur $[0;t]$

• La fonction φ est dérivable sur $]0;t[$

• $\varphi(0)=\varphi(t)=0$

Donc, d'après le théorème de Rolle, on a : $(\exists c\in]0;t[);\varphi'(c)=0$

Or : $(\forall x\in]-1;+\infty[);\varphi'(x)=u(t).v'(x)-u'(x).v(t)$

Donc : $\varphi'(c)=0\iff u(t).v'(c)-u'(c).v(t)=0$

$$\iff u(t).v'(c)=u'(c).v(t)$$

$$\iff\frac{u(t)}{v(t)}=\frac{u'(c)}{v'(c)}$$

car $v(t)\neq 0$ et $v'(t)\neq 0$ pour tout réel $t\in]0;+\infty[$

Ainsi : $(\exists c\in]0;t[);\frac{u(t)}{v(t)}=\frac{u'(c)}{v'(c)}$

b- Déduisons que $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2}$:

Soit $t\in]0;+\infty[$, on a : $\frac{u(t)}{v(t)}=\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$ et $u'(t)=1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t}$ et $v'(t)=2t$

Par suite, d'après le résultat de la question précédente on a :

$(\exists c\in]0;t[);\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2(1+c)}$

Et comme : $0<c<t\iff 2<2(1+c)<2(1+t)$

$$\iff\frac{1}{2(1+t)}<\frac{1}{2(1+c)}<\frac{1}{2}$$

Alors, on a : $(\forall t\in]0;+\infty[);\frac{1}{2(1+t)}<\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}<\frac{1}{2}$

Et puisque : $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$, alors : $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2}$, d'après le théorème des limites et ordre.

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) Montrons que la droite $(D): y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$:

Il suffit de montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 . \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x + \frac{1}{2}$

On pose : $t = \frac{1}{x}$ alors : $x \to +\infty \iff t \to 0^+$

Par suite : $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{t^2} . \ln(1+t) - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} + \frac{1}{2}$

Or $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{t\to0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} + \frac{1}{2} = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

signifie que la droite (D) d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

4) a- • Montrons que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$:

La fonction $u: x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]0; +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. La fonction $v: x \mapsto x^2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. Il s'ensuit que la fonction f telle que: $f(x) = v(x).\ln(u(x))$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

• Montrons que $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = x\left(2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$:

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $f'(x) = v'(x).\ln(u(x)) + v(x).\frac{u'(x)}{u(x)}$

Puisque : $v'(x) = 2x$ et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ alors : $f'(x) = 2x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^2 . \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$

$$= 2x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x}$$

$$= x\left(2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$$

D'où : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = x\left(2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$

b- Montrons que $(\forall x > 0) ; \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$:

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par :

$h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$

La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; h'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{-1}{x(x+1)^2}$

Donc : $h'(x) < 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$, par conséquent la fonction h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Et comme h est continue sur $]0;+\infty[$ alors :

$h(]0;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x); \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)\right[=]0;+\infty[$,

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+x} = 1$)

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; h(x) > 0$

Ainsi : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > \dfrac{1}{1+x}$

• Déduction :

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $1+\dfrac{1}{x} > 1$ alors : $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > 0$

Par suite : $2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Or $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > \dfrac{1}{x+1}$ donc : $2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > \dfrac{1}{x+1}$

C'est-à-dire : $2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x} > 0$ soit $x\left(2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x}\right) > 0$

Ainsi : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) > 0$

c- Tableau de variations da la fonction f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	↗	$+\infty$

5) a- Montrons que f admet une fonction réciproque :

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur l'intervalle

$J = f([0;+\infty[) = \left[f(0); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0;+\infty[$

Par conséquent f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0;+\infty[= J$

b- Montrons que f^{-1} est dérivable en $\ln(2)$ et calculons $(f^{-1})'(\ln 2)$:

on a: $f(1) = \ln 2 \Longrightarrow f^{-1}(\ln 2) = 1$

Et : $f'(1) \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en $\ln(2)$ et on a :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$(f^{-1})'(\ln(2)) = \dfrac{1}{f'(1)}$

Etcomme $f'(1) = 2\ln(2) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4\ln(2)-1}{2}$ alors: $(f^{-1})'(\ln(2)) = \dfrac{2}{4\ln(2)-1}$

c- Montrons que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f^{-1}(x)}{x} = +\infty$:

Soit $x \in]0;+\infty[$; on pose : $y = f^{-1}(x)$ alors : $x = f(y)$ et $x \to 0^+ \Leftrightarrow y \to 0^+$

Et on a : $\dfrac{f^{-1}(x)}{x} = \dfrac{y}{f(y)}$

Comme $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{f(y)}{y} = 0$ et $\dfrac{f(y)}{y} > 0$

alors : $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{y}{f(y)} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f^{-1}(x)}{x} = \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{y}{f(y)} = +\infty$

d- Montrons que $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f^{-1}(x) > x$:

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $f^{-1}(x) > x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) > f(x)$

$\Leftrightarrow x > f(x)$ (car f est croissante)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} < 0$

Donc, il suffit de montrer que : $(\forall x > 0) ; \dfrac{1}{x} > \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

On pose : $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}$; $x \in]0;+\infty[$

On a : $(\forall x > 0) ; g'(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2(x+1)}$

Donc pour tout $x \in]0;+\infty[$; $g'(x) > 0$

D'où : la fonction g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Par suite : $g(]0;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to 0^+} g(x); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-\infty;0[$

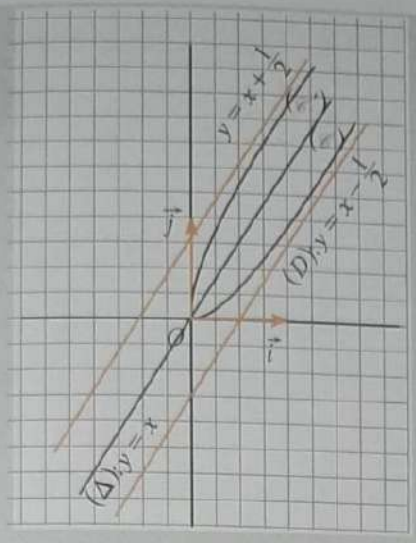
D'où : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; g(x) < 0$

C'est-à-dire : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} < 0$

Ainsi : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f^{-1}(x) > x$

6) Courbe.

For more visit: L9ray.com CamScanner



Exercice 26

A/ 1) Montrons que :

$(\forall x > -1) ; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

On considère les fonctions φ_1 et φ_2 définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$\varphi_1(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(x+1)$ et $\varphi_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3(x+1)} - x + \ln(x+1)$

Les fonctions φ_1 et φ_2 dont dérivables sur $]-1;+\infty[$ et on a pour tout $x \in]-1;+\infty[$: $\varphi_1'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} = \frac{x^3}{x+1}$

Et $\varphi_2'(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \times \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^3}{3(x+1)^2}$

Donc : $(\forall x \in]-1;0]) ; \varphi_1'(x) \leq 0$ et $\varphi_2'(x) \leq 0$

$(\forall x \in [0;+\infty[) ; \varphi_1'(x) \geq 0$ et $\varphi_2'(x) \geq 0$

Il s'ensuit que φ_1 et φ_2 sont décroissantes sur $]-1;0]$

Il en résulte donc que : $(\forall x \in]-1;0]) ; \varphi_1(x) \geq \varphi_1(0)$ et $\varphi_2(x) \geq \varphi_2(0)$

De même φ_1 et φ_2 sont croissantes sur $[0;+\infty[$

Il en résulte donc que : $(\forall x \in [0;+\infty[) ; \varphi_1(x) \geq \varphi_1(0)$ et $\varphi_2(x) \geq \varphi_2(0)$

D'où : $(\forall x \in]-1;+\infty[) ; \varphi_1(x) \geq 0$ et $\varphi_2(x) \geq 0$

Conclusion : $(\forall x \in]-1;+\infty[) ; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

2) Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$:

Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, on a :

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

équivaut à : $-\frac{x}{3}+\frac{1}{2} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}-\frac{x}{3(x+1)}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3(x+1)}\right)=\frac{1}{2}$ alors :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$

B/ 1) a- Montrons que f est continue sur $[-1;+\infty[$:

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $]1;+\infty[$ et comme $\ln(1+x)=0$ équivaut à $x=0$ alors la fonction u est continue et ne s'annule pas sur les intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$.

Il s'ensuit que f est continue en tant que quotient de deux fonctions continues.

• On a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ signifie que la fonction f est continue en 0.

• On a : $\lim\limits_{x\to -1^+} x+1=0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}\ln(X)=-\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(x+1)=-\infty$

Par suite : $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{\ln(1+x)}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x}{\ln(1+x)}=0$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$ signifie que f est continue à droite en -1.

Conclusion : La fonction f est continue sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

b- • Etudions la dérivabilité de f à droite en -1:

Soit $x\in]-1;0[$; on a : $f(-1)=0$ et $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{x}{(x+1)\ln(x+1)}$

On pose : $t=x+1$, alors : $x\to -1^+ \iff t\to 0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)\ln(x+1)=\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t)=0^-$, il s'ensuit

$\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}=-\infty$

par suite : $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x}{(x+1)\ln(x+1)}=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$ c'est-à-dire la fonction f n'est pas dérivable à droite en -1.

• **Interprétation graphique:**

La courbe (C) admet une demi-tangente verticale à droite en son point

For more visit: L9ray.com CamScanner

d'abscisse -1, dirigée vers le haut.

c- • Montrons que f est dérivable en 0:

Soit $x \in]-1;+\infty[$ et $x \neq 0$, on a : $f(0)=1$

et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x}{\ln(1+x)}-1\right)=\left(\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right)\times\dfrac{x}{\ln(x+1)}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(x+1)}=1$

alors : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}\right)\times\dfrac{x}{\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{2}$ signifie que f est dérivable en 0 et que : $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

• Equation de la tangente à (C) au point $A(0;1)$:

On a : $f(0)=1$ et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ donc : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$, c'est-à-dire : $y=\dfrac{1}{2}x+1$, est une équation de la tangente à la courbe (C) au point $A(0;1)$.

2) a- Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

Soit $x \in]-1;+\infty[$, on a : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}\times\dfrac{x+1}{\ln(x+1)}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{X}{\ln X}=+\infty$ (on pose $X=x+1$)

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(x+1)}=0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$

• Interprétation géométrique :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

b- Montrons que f est dérivable :

La fonction $u: x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable et ne s'annule pas sur chacun des intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$.

Par suite la fonction $f: x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x+1)}$ est dérivable sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

• Calculons $f'(x)$ où $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$:

Pour tout réel $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, on a :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$f'(x)=\frac{\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}}{(\ln(x+1))^2}=\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{(x+1)(\ln(x+1))^2}$$

3) a- Montrons que $(\forall x>-1);(x+1)\ln(x+1)-x\geq 0$:

On considère la fonction Ψ définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$\Psi(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$

La fonction Ψ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et que :

$(\forall x\in]-1;+\infty[);\Psi'(x)=\frac{x+1}{x+1}+\ln(x+1)-1=\ln(x+1)$

Par suite : • $\Psi'(x)=0\iff x=0$ • $\Psi'(x)>0\iff x\in]0;+\infty[$

• $\Psi'(x)<0\iff x\in]-1;0[$

Donc la fonction Ψ est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-1;0]$.

Par conséquent : si $x\geq 0$ alors : $\Psi(x)\geq\Psi(0)=0$

si $-1<x\leq 0$ alors : $\psi(x)\geq\psi(0)=0$

Ainsi : $(\forall x\in]-1;+\infty[);(x+1)\ln(x+1)-x\geq 0$

b- Le tableau de variations de f :

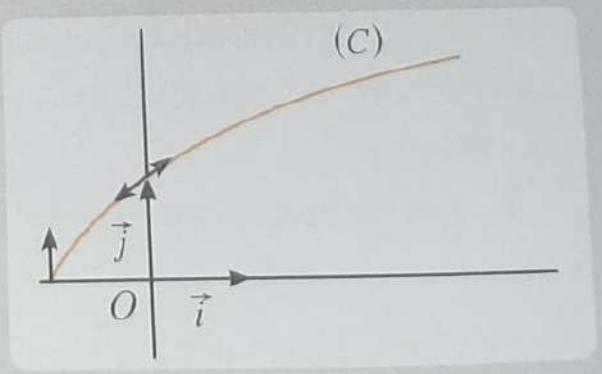
Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+1)\ln(x+1)-x$, donc :

$(\forall x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[);f'(x)>0$

Par suite le tableau de variations de f est :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+		+	
f	‖	↗	0	↗	$+\infty$
	‖			1	

c- Le tracé :



4) a- Montrons que $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>e-1$:

• Initialisation :

Pour $n=0$, on a : $u_0=2$ et $2>e-1$ donc : $u_0>e-1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $u_n > e-1$, et montrons que : $u_{n+1} > e-1$

La fonction f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$

Donc : $u_n > e-1 \Rightarrow f(u_n) > f(e-1)$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(e-1) = e-1$

Donc : $u_{n+1} > e-1$

• Conclusion :

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > e-1$

b- Montrons que la suite (u_n) est strictement décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{\ln(1+u_n)} - u_n = u_n \times \left(\dfrac{1}{\ln(1+u_n)} - 1\right)$

Puisque : $u_n > e-1 \Rightarrow u_n + 1 > e$

$\Rightarrow \ln(1+u_n) > 1$

Alors : $\dfrac{1}{\ln(1+u_n)} - 1 < 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n < 0$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} < u_n$ signifie que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Et comme (u_n) est suite minorée par $e-1$, donc elle est convergente.

c- Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = e-1$:

La fonction f est continue sur $[e-1;+\infty[$ telle que :

$f([e-1;+\infty[) \subset [e-1;+\infty[$ et $u_0 \in [e-1;+\infty[$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$

Comme la suite (u_n) est convergente alors sa limite ℓ vérifie : $f(\ell) = \ell$ et $\ell \in [e-1;+\infty[$

Or $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ln(1+\ell) = 1$

$\Leftrightarrow \ell = e-1$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e-1$

Exercice 27

1) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$:

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $g(x) = x(-\ln(x)+2)+2$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \ln(x) = -\infty$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} x(2-\ln(x))+2 = -\infty$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2) Montrons que g est strictement croissante sur $]0;e]$ et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$:

La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; g'(x) = 1 - \ln(x)$

Et on a : • $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

• $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]e;+\infty[$

• $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0;e[$

Donc la fonction g est strictement croissante sur $]0;e]$ et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$.

3) a- • Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]e;+\infty[$:

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]e;+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]e;+\infty[$ sur $g(]e;+\infty[)$.

où $g(]e;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x); g(e)\right[=]-\infty; e-2[$

Puisque : $0 \in]-\infty; e-2[$ alors il existe un unique réel α de $]e;+\infty[$ tel que : $g(\alpha) = 0$

• Montrons que $4 < \alpha < 5$:

On a : $g(4) = -4\ln(4) + 8 - 2 = -8\ln(2) + 6 = 8\left(\frac{3}{4} - \ln(2)\right)$ et $g(5) = 5\left(\frac{8}{5} - \ln(5)\right)$

Et comme $\ln 2 < \frac{3}{4}$ et $\ln(5) > \frac{8}{5}$ alors : $g(4) > 0$ et $g(5) < 0$

Donc : $g(5) < 0 < g(4)$ c'est-à-dire : $g(5) < g(\alpha) < g(4)$

Puisque la fonction g est décroissante sur $]e;+\infty[$ alors : $4 < \alpha < 5$

b- Déduction :

• La fonction g est croissante sur $]0;1]$. Donc si $x \in]0;1]$ alors $g(x) \leq g(1)$ or $g(1) = 0$, il s'ensuit que: $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0;1]$.

• La fonction g est décroissante sur $[\alpha;+\infty[$. Donc si $x \in [\alpha;+\infty[$ alors $g(x) \leq g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$, il s'ensuit que : $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in [\alpha;+\infty[$.

• La fonction g est croissante sur $[1;e]$ et décroissante sur $[e;\alpha]$.

Donc : $1 \leq x \leq e \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq g(e)$

$\Rightarrow 0 \leq g(x)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

et $e \leq x \leq \alpha \Rightarrow g(\alpha) \leq g(x) \leq g(e)$

$\Rightarrow 0 \leq g(x)$

Par suite : $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1;\alpha]$.

II/ 1) a- Montrons que f est continue en 1:

Soit $x \in]0;+\infty[$ et $x \neq 1$, on a : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1} \times \ln(x)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = \ln(1) = 0$

Alors : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} \times \ln x = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$ signifie que la fonction f est continue en 1.

b- Montrons que f est dérivable en 1:

Soit $x \in]0;+\infty[$ et $x \neq 1$, on a : $f(1) = 0$ et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} = \left(\dfrac{\ln(x)}{x-1}\right)^2$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ alors : $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)^2 = 1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$

D'où la fonction f est dérivable en 1, et que : $f'(1) = 1$

2) Calcul de $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$:

• On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(x))^2 = +\infty$,

et comme : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x-1} = -1$

Alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)^2}{x-1} = -\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

• Soit $x \in]1;+\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{x} \times \left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

et $\dfrac{\ln^2(x)}{x} = \left(\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\dfrac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$

Puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{t\to +\infty} \left(\dfrac{2\ln t}{t}\right) = 0$

(en posant $t = \sqrt{x}$; $x \to +\infty \iff t \to +\infty$)

Alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x} = 0$, et on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x} \times \left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 0$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) a- Montrons que $(\forall x \in]0;+\infty[-\{1\}) ; f'(x) = \frac{\ln(x)}{x(x-1)^2} \times g(x)$:

La fonction f est dérivable en tout point de $]0;+\infty[-\{1\}$

Pour tout $x \in]0;+\infty[-\{1\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x-1)\ln(x) - \ln^2(x)}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)\ln(x) - x\ln^2(x)}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{\ln(x)(2x-2-x\ln(x))}{x(x-1)^2} = \frac{\ln(x)}{x(x-1)^2} \times g(x)$$

b- Montrons que $f(\alpha) = 4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right)$:

On a : $f(\alpha) = \frac{\ln^2(\alpha)}{\alpha-1}$, et $g(\alpha) = 0$

Or $g(\alpha) = 0 \iff -\alpha\ln(\alpha) + 2\alpha - 2 = 0$

$$\iff \ln(\alpha) = \frac{2(\alpha-1)}{\alpha}$$

Donc : $f(\alpha) = \frac{4(\alpha-1)^2}{\alpha^2} \times \frac{1}{\alpha-1} = 4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right)$

c- Montrons que $f(\alpha) \in]0;1[$:

On a : $4 < \alpha < 5$ équivaut à $3 < \alpha - 1 < 4$

Donc : $4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right) > 0$ c'est-à-dire : $f(\alpha) > 0$

Et comme : $\frac{1}{\alpha^2} < \frac{1}{16}$ alors : $\frac{\alpha-1}{\alpha^2} < \frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2} < 1$

Ainsi : $f(\alpha) \in]0;1[$

d- Montrons que f est strictement croissante sur $]0;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$:

On a: $(\forall x \in]0;+\infty[-\{1\}) ; f'(x) = \frac{\ln(x)}{x(x-1)^2} \times g(x)$

Alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)\ln(x)$ donc comme suit :

x	0		1		α	$+\infty$
$\ln(x)$	-		0	+		+
$g(x)$	-		0	+	0	-
$g(x)\ln(x)$	+		0	+	0	-

C'est-à-dire : $(\forall x \in]0;\alpha[) ; g(x)\ln(x) \geq 0$ et $(\forall x \in [\alpha;+\infty[) ; g(x)\ln(x) \leq 0$

Et on a : $f'(x) = 0 \iff x = \alpha$ et f est continue en 1.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

III/ 1) Montrons que F est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$:

La fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$, signifie que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $(\forall x>0);F'(x)=f(x)$

Et comme : • $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

• $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in]1;+\infty[$

• $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in]0;1[$

Alors : $(\forall x\in]0;1]);F'(x)\leq 0$ et $(\forall x\in [1;+\infty[);F'(x)\geq 0$

Donc la fonction F est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0;1]$.

2) Montrons que $(\forall x\in]0;\alpha]);F(x)\geq x$:

On considère la fonction φ définie sur $]0;\alpha]$ par : $\varphi(x)=F(x)-x$

La fonction φ est dérivable sur $]0;\alpha]$ et que :

$(\forall x\in]0;\alpha]);\varphi'(x)=F'(x)-1=f(x)-1$

Et comme f est strictement croissante sur $]0;\alpha]$ alors :

$(\forall x\in]0;\alpha]);f(x)\leq f(\alpha)$

Or $f(\alpha)\in]0;1[$; $f(x)<1$ pour tout $x\in]0;\alpha]$

Par suite : $(\forall x\in]0;\alpha]);\varphi'(x)<0$

Donc la fonction φ est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$.

Il s'ensuit que : $(\forall x\in]0;\alpha]);\varphi(x)\geq\varphi(\alpha)$

Or $\varphi(\alpha)=F(\alpha)-\alpha=0$ (car $F(\alpha)=\alpha$)

Ainsi : $(\forall x\in]0;\alpha]);F(x)\geq x$

3) Montrons que $(\exists c\in]1;\alpha[);\alpha-F(1)=f(c)(\alpha-1)$:

La fonction F est dérivable $]0;+\infty[$ et $[1;\alpha]\subset]0;+\infty[$

alors : la fonction F est continue sur $[1;\alpha]$ et dérivable sur $]1;\alpha[$.

Donc; d'après le théorème des accroissements finis :

$(\exists c\in]1;\alpha[);F(\alpha)-F(1)=(\alpha-1)F'(c)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Comme : $F(\alpha)=\alpha$ et $F'(c)=f(c)$

Alors : $(\exists c\in]1;\alpha[)\,;\alpha-F(1)=(\alpha-1)f(c)$

4) a- Montrons, par récurrence, que $(\forall n\in\mathbb{N})\,;c\le u_n\le\alpha$:

• **Initialisation :**

Pour $n=0$, on a : $u_0=c$ et $c\in]1;\alpha[$, alors : $c\le u_0<\alpha$

Donc : $c\le u_0\le\alpha$

• **Hérédité :**

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $c\le u_n\le\alpha$, montrons que $c\le u_{n+1}\le\alpha$.

La fonction F est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et $[c;\alpha]\subset[1;+\infty[$ (car $c\in]1;\alpha[$),

donc : $c\le u_n\le\alpha\Rightarrow F(c)\le F(u_n)\le F(\alpha)$

$\Rightarrow c\le u_{n+1}\le\alpha$

car $F(\alpha)=\alpha$ et $F(c)\ge c$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;c\le u_n\le\alpha\Rightarrow c\le u_{n+1}\le\alpha$

• **Conclusion :**

D'après le principe de récurrence; on a : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;c\le u_n\le\alpha$

b- Montrons que la suite (u_n) est croissante :

On a : $\forall x\in]0;\alpha[\,;F(x)\ge x$ et $u_n\in[0;\alpha]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;F(u_n)\ge u_n$

C'est-à-dire : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_{n+1}\ge u_n$ signifie que la suite (u_n) est croissante.

Déduction : La suite (u_n) est croissante et majorée par le réel α, donc elle est convergente.

c- Montrons que $(\forall(x;y)\in([c;\alpha])^2)\,;|F(x)-F(y)|\le f(\alpha)|x-y|$:

Puisque la fonction F est continue et dérivable sur $[c;\alpha]$ (car $[c;\alpha]\subset]0;+\infty[$).

Alors elle est continue et dérivable sur chaque segment $[x;y]$ ou $[y;x]$ (où x et y sont deux éléments de $[c;\alpha]$).

Donc : d'après le théorème des accroissements finis,

on a : il existe un réel d compris entre x et y tel que :

For more visit: L9ray.com CamScanner

$F(x)-F(y)=(x-y)F'(d)$

Par suite : $(\exists d\in]c;\alpha[)\,;\,F(x)-F(y)=(x-y)f(d)$

Il s'ensuit que : $(\exists d\in]c;\alpha[)\,;\,|F(x)-F(y)|=|x-y|\,f(d)$

(car $(\forall x\in[1;+\infty[)\,;\,f(x)\geq 0$)

Et on a : $d\leq\alpha\Rightarrow f(d)\leq f(\alpha)$. Alors : $|x-y|\,f(d)\leq|x-y|\,f(\alpha)$

Donc : $|F(x)-F(y)|\leq|x-y|\,f(\alpha)$

Ainsi : $(\forall(x;y)\in([c;\alpha])^2)\,;\,|F(x)-F(y)|=|x-y|\,f(\alpha)$

d- Montrons que $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,|u_n-\alpha|\leq(f(\alpha))^n(\alpha-c)$:

En prenant : $x=u_n$ et $y=\alpha$, on obtient alors :

$|F(u_n)-F(\alpha)|\leq|u_n-\alpha|\,f(\alpha)$

Comme : $F(u_n)=u_{n+1}$; $F(\alpha)=\alpha$ et $|u_n-\alpha|=\alpha-u_n$

Alors : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,|u_{n+1}-\alpha|\leq|u_n-\alpha|f(\alpha)$

• Par récurrence montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,|u_{n+1}-\alpha|\leq(f(\alpha))^n(\alpha-c)$

• **Initialisation :**

Pour $n=0$, on a : $|u_0-\alpha|=|c-\alpha|=\alpha-c$ et

$(f(\alpha))^0(\alpha-c)=1\times(\alpha-c)=\alpha-c$

Donc : $|u_n-\alpha|\leq(f(\alpha))^0(\alpha-c)$

• **Hérédité :**

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que : $|u_n-\alpha|\leq(f(\alpha))^n(\alpha-c)$

et montrons que : $|u_{n+1}-\alpha|\leq(f(\alpha))^{n+1}(\alpha-c)$

On a : $|u_{n+1}-\alpha|\leq|u_n-\alpha|\times f(\alpha)$ et $|u_n-\alpha|f(\alpha)\leq(f(\alpha))^{n+1}.(\alpha-c)$

Donc : $|u_{n+1}-\alpha|\leq(f(\alpha))^{n+1}.(\alpha-c)$

• Conclusion :

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,|u_n-\alpha|\leq(f(\alpha))^n(\alpha-c)$

• **Déduction :**

Comme $|f(\alpha)|<1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(\alpha))^n=0$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,|u_n-\alpha|\leq(f(\alpha))^n(\alpha-c)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(\alpha))^n(\alpha-c)=0$

Ainsi, d'après les critères de convergence :

la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 28

1) a- Montrons que la fonction f_n est dérivable à droite en 0

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On a : $f_n(x) = x^n.\ln(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$ et $f_n(0) = 0$

Donc : $\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = x^{n-1}\cdot\ln(x)$

Et comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{n-1}\cdot\ln(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = 0$

c'est-à-dire la fonction f_n est dérivable à droite en 0 et que $(f_n)'_d(0) = 0$

b- • Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\cdot\ln(x) = +\infty$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-1}\cdot\ln(x) = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-1} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$

• **Interprétation graphique**

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty$, alors la courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2) • Calcul de $f'_n(x)$ où $x \in]0;+\infty[$:

La fonction f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$, en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, qui sont $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto \ln(x)$

Et on a : $(\forall n \in]0;+\infty[)$; $f'_n(x) = nx^{n-1}\cdot\ln(x) + x^{n-1}$

• Signe de $f'_n(x)$ pour $x > 0$:

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $f'_n(x) = nx^{n-1}\cdot\left(\ln(x)+\dfrac{1}{n}\right)$, donc :

• $f'_n(x) = 0 \iff x = e^{-\frac{1}{n}}$ • $f'_n(x) > 0 \iff x \in \left]e^{-\frac{1}{n}};+\infty\right[$

• $f'_n(x) < 0 \iff x \in \left]0;e^{-\frac{1}{n}}\right[$

• Tableau de variations de f_n :

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		1		x_n		$+\infty$
$f'_n(x)$	0	$-$	0			$+$			
f_n	0	↘	$-\dfrac{1}{ne}$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b- Positon relative de (C_n) et (C_{n+1}) :

Soit $n \geqslant 2$ et $x \in]0;+\infty[$, on a :

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} \cdot \ln(x) - x^n \cdot \ln(x) = x^n \cdot \ln(x)(x-1)$

Donc le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est celui de $\ln(x)(x-1)$ sur $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln(x)$		$+$	0	$+$	

Par suite : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0$

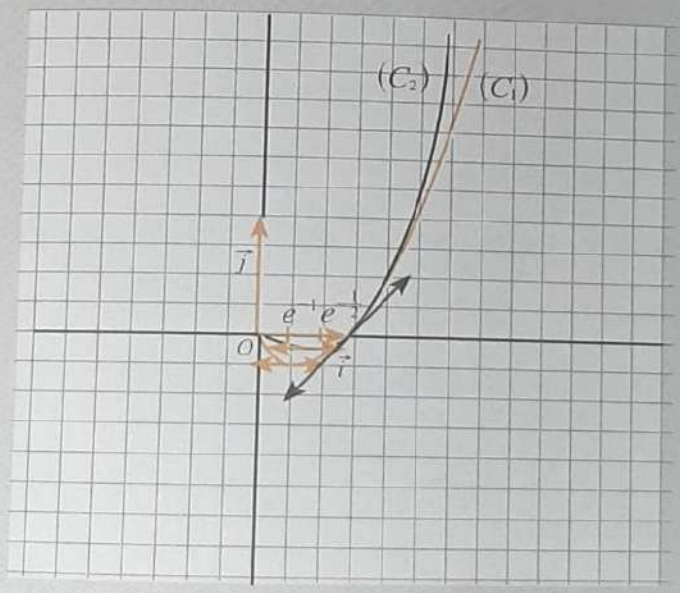
et $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$

Ainsi la courbe (C_{n+1}) se trouve en dessous de la courbe (C_n) sur $[0;+\infty[$, et se coupent en O et $A(1;0)$

c- • La tangente au point $A(1;0)$ a pour équation : $y = x - 1$

• La demi-tangente au point O a pour équation: $\begin{cases} y = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

• Courbe (C_1) et (C_2)



3) a- Montrons que : $(\forall n \geqslant 2)(\exists! x_n \in]0;+\infty[)$; $f_n(x_n) = 1$

La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $\left[0;e^{-\frac{1}{n}}\right]$ donc $f\left(\left[0;e^{-\frac{1}{n}}\right]\right) = \left[-\frac{1}{ne};0\right]$

il s'ensuit que $\left(\forall x \in \left[0;e^{-\frac{1}{n}}\right]\right)$; $f_n(x) \leqslant 0$

Par conséquent l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution dans l'intervalle $\left[0;e^{-\frac{1}{n}}\right]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'autre part la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$ sur $f(]e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[) =]-\frac{1}{ne}; +\infty[$

Puisque : $1 \in]-\frac{1}{ne}; +\infty[$ alors $(\exists! x_n \in]e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[)$; $f_n(x_n) = 1$

Ainsi : $(\forall n \geqslant 2)(\exists! x_n \in]0; +\infty[)$; $f_n(x_n) = 1$

b- Montrons que : $(\forall n \geqslant 2)$; $f_{n+1}(x_n) > 1$

Soit $n \geqslant 2$; on a : $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} \cdot \ln(x_n) = x_n \cdot x_n^n \cdot \ln(x_n) = x_n \cdot f(x_n) = x_n$

Et comme $f_n(1) < f_n(x_n)$ alors $x_n > 1$, (car la fonction f est strictement croissante sur $[e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$)

Donc $f_{n+1}(x_n) > 1$ pour tout $n \geqslant 2$

c- • **Déduction :**

Soit $n \geqslant 2$; on a : $f_{n+1}(x_n) > 1$ et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$ donc :

$f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$. Et comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $]e^{-\frac{1}{n+1}}; +\infty[$, alors : $x_n > x_{n+1}$

Ainsi : $(\forall n \geqslant 2)$; $x_{n+1} < x_n$

c'est-à-dire la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante

• Convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$:

La suite (x_n) est décroissante minorée par la réel 1, donc elle est convergente

4) a- Montrons que : $(\forall n \geqslant 2)$; $b_n \cdot \ln(b_n) = n$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on a :

$b_n = x_n^n$ alors $\ln(b_n) = \ln(x_n^n) = n\ln(x_n)$

Or $f(x_n) = 1 \iff x_n^n \cdot \ln(x_n) = 1$

$\iff b_n \cdot \ln(x_n) = 1$

Donc $b_n \cdot \ln(b_n) = n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

b- Montrons que : $(\forall x \in [1; +\infty[)$; $x - 1 \leqslant x\ln(x)$

On considère la fonction φ définie sur $[1; +\infty[$ par : $\varphi(x) = x \cdot \ln(x) - x + 1$

La fonction φ est dérivable sur $[1; +\infty[$, et que : $(\forall x \geqslant 1)$; $\varphi'(x) = \ln(x)$

Donc : $(\forall x \geqslant 1)$; $\varphi'(x) \geqslant 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Par suite la fonction φ est croissante sur $[1;+\infty[$

D'où : $(\forall x \geqslant 1)\ ;\ \varphi(x) \geqslant \varphi(1)$

Et comme $\varphi(1) = 0$ alors $\varphi(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x \geqslant 1$

Ainsi : $(\forall x \in [1;+\infty[)\ ;\ x - 1 \leqslant x\ln(x)$

c- **Déduction :**

Soit $n \geqslant 2$; on a $x_n > 1$ alors $x_n^n > 1$, c'est-à-dire : $b_n > 1$

Donc : $b_n - 1 \leqslant b_n \cdot \ln(b_n)$ d'après la question précédente

Et on a $b_n \cdot \ln(b_n) = n$ donc $b_n - 1 \leqslant n$

Il s'ensuit que : $1 < b_n \leqslant 1 + n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

5) a- Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$

Soit $n \geqslant 2$, on a : $\sqrt[n]{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)}$

Or $\frac{1}{n}\ln(n+1) = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = 0$ par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = e^0 = 1$

b- Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

Soit $n \geqslant 2$; on a : $1 < b_n \leqslant n+1 \Longrightarrow 1 < x_n \leqslant \sqrt[n]{n+1}$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ alors, d'après les critères de convergence

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

Exercice 29

1) a) Montrons que la fonction est continue à droite en $x_0 = 0$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $\ln x = 4\ln(\sqrt[4]{x})$, donc :

$f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2 = (\sqrt[4]{x}\ln(x))^2 = (4\sqrt[4]{x}\ln(\sqrt[4]{x}))^2$

On pose : $t = \sqrt[4]{x}$, donc $x \longrightarrow 0^+ \Longleftrightarrow t \longrightarrow 0^+$

Il s'ensuit $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt[4]{x}\ln(\sqrt[4]{x}) = \lim\limits_{t\to0^+} t\ln(t) = 0$

Par suite $\lim\limits_{x\to0^+} (4\sqrt[4]{x}\ln(\sqrt[4]{x}))^2 = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim(4\cdot\sqrt[4]{x}\ln(\sqrt[4]{x}))^2 = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$ signifie que la fonction f est continue à droite en $x_0 = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b- Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln x)^2 = +\infty$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = \left(\dfrac{4\ln(\sqrt[4]{x})}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$

On pose $t = \sqrt[4]{x}$, donc $x \longrightarrow +\infty \Longleftrightarrow t \longrightarrow +\infty$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4\ln(\sqrt[4]{x})}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4\ln(\sqrt[4]{x})}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 = 0$

- **Nature de la branche infinie :**

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ donc la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) a- • étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$:

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $f(0) = 0$ et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$

Puisque $\lim\limits_{x\to0^+} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = +\infty$

signifie que la fonction f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 0$

- **Interprétation géométrique :**

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale à droite en son point d'abscisse 0, dirigée vers le haut

b- • Montrons que f est dérivable sur $]0;+\infty[$

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$, en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ qui sont : $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto \ln(x)$

• Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{\ln(x)\cdot(\ln(x)+4)}{2\sqrt{x}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^2 + \frac{2\sqrt{x}}{x}\ln x$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\ln x$

$= \frac{(\ln x)^2 + 4\ln x}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{\ln(x)\cdot(\ln x + 4)}{2\sqrt{x}}$

c- Tableau de variations de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln(x)(\ln(x)+4)$ sur $]0;+\infty[$, alors :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\ln x = -4$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^{-4}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -4 < \ln(x) < 0$

$\Leftrightarrow e^{-4} < x < 1$

par suite le tableau de variations de f est comme suit :

x	0		e^{-4}		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	$\left(\frac{4}{e}\right)^2$	↘	0	↗	$+\infty$

d- Montrons que : $(\forall x \in [0;1])$; $0 \leqslant f(x) \leqslant \left(\frac{4}{e}\right)^2$

• La fonction f est croissante sur $[0;e^{-4}]$ donc :

$0 \leqslant x \leqslant e^{-4} \Rightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(e^{-4})$

$\Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant \left(\frac{4}{e}\right)^2$

• La fonction f est décroissante sur $[e^{-4};1]$ donc :

$e^{-4} \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(e^{-4})$

$\Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant \left(\frac{4}{e}\right)^2$

Ainsi : $(\forall x \in [e^{-4};1])$; $0 \leqslant f(x) \leqslant \left(\frac{4}{e}\right)^2$

3) a- Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f''(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}}(8-(\ln x)^2)$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{\ln^2(x) + 4\ln(x)}{2\sqrt{x}}$,

For more visit: L9ray.com CamScanner

alors : $f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}\left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{4}{x}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln^2(x) + 4\ln(x))}{x}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{4\ln(x) + 8 - \ln^2(x) - 4\ln(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{8 - \ln^2(x)}{4x\sqrt{x}}$

Ainsi : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f''(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}}(8 - (\ln x)^2)$

b- étude de la concavité de la courbe (C) :

On a : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 8 - (\ln x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 2\sqrt{2}$ ou $\ln(x) = -2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = e^{2\sqrt{2}}$ ou $x = e^{-2\sqrt{2}}$

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 8 - (\ln x)^2 > 0$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} < \ln x < 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow e^{-2\sqrt{2}} < x < e^{2\sqrt{2}}$

- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0;e^{-2\sqrt{2}}[\cup]e^{2\sqrt{2}};+\infty[$

Par conséquent on a le tableau suivant :

x	0		$e^{-2\sqrt{2}}$		$e^{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
La concavité	‖	∩		∪		∩	

- **Les points d'inflexions de la courbe (C) :**

On a : $f''(x)$ s'annule en $e^{-2\sqrt{2}}$ et $e^{2\sqrt{2}}$ en changeant de signe, donc les points : $A(e^{-2\sqrt{2}};8e^{-\sqrt{2}})$ et $B(e^{2\sqrt{2}};8e^{\sqrt{2}})$ sont des points d'inflexion de $(\mathscr{C})$

4) a- La fonction g est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur l'intervalle $g([1;+\infty[)$ où $g([1;+\infty[) = [g(1); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[= [0;+\infty[$

Par conséquent g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[0;+\infty[$

- Calcul de $(g^{-1})'(\sqrt{e})$

On a : $g(e) = \sqrt{e}$ et $g'(e) = \frac{5}{2\sqrt{e}}$ donc : $(g^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{e}}{5}$

b- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]0;+\infty[)$; $g^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n} + e$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

For more visit: L9ray.com CamScanner

La fonction g^{-1} est une bijection de $]0;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$

Puisque : $\frac{1}{n}+e \in]1;+\infty[$ alors : $(\exists!\alpha_n \in]0;+\infty[)$; $g^{-1}(\alpha_n)=\frac{1}{n}+e$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists!\alpha_n \in]0;+\infty[)$; $g^{-1}(\alpha_n)=\frac{1}{n}+e$

c- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\frac{1}{n+1}+e<\frac{1}{n}+e$ c'est-à-dire : $g^{-1}(\alpha_{n+1})<g^{-1}(\alpha_n)$,

puisque la fonction g^{-1} est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ alors $\alpha_{n+1}<\alpha_n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_{n+1}<\alpha_n$ signifie que la suite (α_n) est strictement décroissante

Et comme la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0 donc elle est convergente

d- Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\sqrt{e}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $g^{-1}(\alpha_n)=\frac{1}{n}+e$ donc $g\left(\frac{1}{n}+e\right)=\alpha_n$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n=g\left(\frac{1}{n}+e\right)$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+e=e$ et la fonction g est continue en 2 alors

$\lim\limits_{n\to+\infty}g\left(\frac{1}{n}+e\right)=g(e)=\sqrt{e}$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\sqrt{e}$

Exercice 30

1) a- Montrons que la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$

• Continuité de la fonction f sur $]0;+\infty[$

La fonction $\ln$ est continue sur $]0;+\infty[$, donc la fonction f :

$x\longmapsto x(1+\ln^2(x))$ est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $]0;+\infty[$

• Continuité de la fonction f à droite on a :

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $f(x)=x+x(\ln x)^2=x+(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}))^2$

On pose : $X=\sqrt{x}$, alors : $x\longrightarrow 0^+ \Longleftrightarrow X\longrightarrow 0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})=\lim\limits_{X\to 0^+}X\ln(X)=0$ par suite $\lim\limits_{x\to 0^+}(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}))^2=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x+(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}))^2=0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$, c'est-à-dire la fonction f est continue à droite en 0

Par conséquent la fonction f est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b- Étudions la dérivabilité de f à droite en 0

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1+\ln^2(x)$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln^2(x) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, c'est-à-dire la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0

• **Interprétation géométrique :**

La courbe (C) admet une demi-tangente verticale à droite en son point d'abscisse 0, dirigée vers le haut

c- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\ln^2(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1+\ln^2(x)) = +\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\ln^2(x) = +\infty$

• La nature de la branche infinie

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2) a- • Montrons que f est dérivable sur $]0;+\infty[$

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ qui sont $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x\ln^2(x)$

• Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ f'(x) = (1+\ln x)^2$

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a :

$f'(x) = 1+\ln^2(x) + 2x \times \dfrac{1}{x}\ln(x) = 1+\ln^2(x)+2\ln(x) = (1+\ln(x))^2$

Donc : $(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) = (1+\ln x)^2$

b- Dressons le tableau de variations de f :

On a : $f'(x) = 0 \iff \ln(x)+1 = 0$

$\iff x = e^{-1}$

Et $(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) \geqslant 0$

Donc le tableau de variations de f est comme suit :

For more visit: L9ray.com CamScanner

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
f	0	↗	e^{-1}	↗	$+\infty$

c- Une équation de la tangente (T) :

On a : $f(1)=1$ et $f'(1)=1$ donc une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y=1\times(x-1)+1$

Ainsi : (T) : $y=x$

d- Montrons que : $f([e^{-1};1])\subset[e^{-1};1]$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[e^{-1};1]$

Donc : $f([e^{-1};1])=[f(e^{-1});f(1)]$

Puisque : $f(1)=1$ et $f(e^{-1})=e^{-1}\times(1+1)=\frac{2}{e}$ et $\frac{1}{e}<\frac{2}{e}$

alors : $\left[\frac{2}{e};1\right]\subset\left[\frac{1}{e};1\right]$

D'où : $f([e^{-1};1])\subset[e^{-1};1]$

3) • étudions la concavité de (C)

La fonction f est deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$

Soit $x\in]0;+\infty[$; on a : $f'(x)=(1+\ln x)^2$

Donc : $f''(x)=2(1+\ln x)\times\frac{1}{x}=\frac{2(1+\ln x)}{x}$

Ainsi : $(\forall x>0)$; $f''(x)=\frac{2(1+\ln x)}{x}$

Puisque le signe $f''(x)$ est celui de $1+\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$ alors on a le tableau suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Concavité	‖	∩	$\frac{2}{e}$	∪	

• $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en e^{-1} donc le point $I\left(e^{-1};\frac{2}{e}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

b- étude de la position (C) par rapport à (Δ)

Soit $x\in]0;+\infty[$; on a : $f(x)-x=x(1+\ln^2(x))-x=x\ln^2(x)$

Alors : $f(x)-x=0\iff x=1$ ou $x=0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et $(\forall x \in [0;+\infty[)\ ;\ f(x) \geqslant x$

Donc la courbe (C) se trouve au dessus de la droite (Δ)

4) a- Montrons que f admet une fonction réciproque :

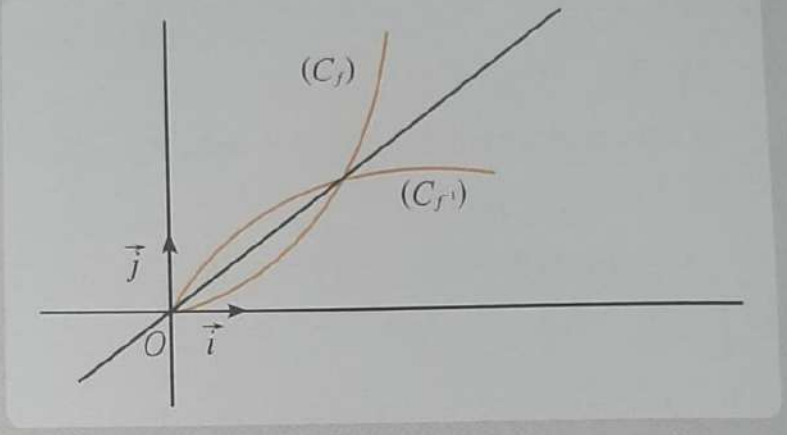
La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

donc f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $f([0;+\infty[)$

où $f([0;+\infty[) = [f(0); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [0;+\infty[$

Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0;+\infty[$

b- Tracé



5) Montrons que : $-1+\ln^2(ea) < \dfrac{b\ln^2(b)-a\ln^2(a)}{b-a} < -1+\ln^2(eb)$

La fonction f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$

donc, d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$(\exists c \in]a;b[)\ ;\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Puisque $f(b)-f(a) = b+b\ln^2(b)-a-a\ln^2(a) = b-a+b\ln^2(b)-a\ln^2(a)$

alors $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 1+\dfrac{b\ln^2(b)-a\ln^2(a)}{b-a}$

Et comme la fonction f' est strictement croissante sur $[a;b]$

alors $a < c < b \Longrightarrow f'(a) < f'(c) < f'(b)$

Par suite $f'(a) < 1+\dfrac{b\ln^2(b)-a\ln^2(a)}{b-a} < f'(b)$

équivaut à $-1+f'(a) < \dfrac{b\ln^2(b)-a\ln^2(a)}{b-a} < -1+f'(b)$

Et on a : $f'(a) = (1+\ln(a))^2 = \ln^2(ea)$ et $f'(b) = \ln^2(eb)$

Ainsi : $-1+\ln^2(ea) < \dfrac{b\ln^2(b)-a\ln^2(a)}{b-a} < -1+\ln^2(eb)$

Initialisation :

II) 1) Montrons, par récurrence, que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ e^{-1} \leqslant u_n < 1$

For more visit: L9ray.com
CamScanner

• Pour $n=0$, on a : $u_0=e^{-1}$ et $e^{-1}\leqslant e^{-1}<1$ donc : $e^{-1}\leqslant u_0<1$

• Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $e^{-1}\leqslant u_n<1$ et montrons que $e^{-1}\leqslant u_{n+1}<1$

Hérédité :

On a : $u_n\in[e^{-1};1[$ et $f([e^{-1};1[)\subset[e^{-1};1[$ donc $f(u_n)\in[e^{-1};1[$ ainsi $e^{-1}\leqslant u_{n+1}<1$

• Conclusion : D'après le principe de récurrence on a :
$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ e^{-1}\leqslant u_n<1$

2) Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante :

On a : $(\forall x\in[e^{-1};1[)\ ;\ f(x)>x$

Par conséquent : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ f(u_n)>u_n$ (car $u_n\in[e^{-1};1[$)

c'est-à-dire : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}>u_n$

Signifie que la suite (u_n) est strictement croissante

Déduction : La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle est convergente

3) Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

La fonction f est continue sur $[e^{-1};1]$ telle que $f([e^{-1};1])\subset[e^{-1};1]$ et $u_0\in[e^{-1};1]$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}=f(u_n)$. Comme la suite (u_n) est convergente

alors sa limite ℓ vérifie : $f(\ell)=\ell$ et $\ell\in[e^{-1};1]$

Or $f(\ell)=\ell\Leftrightarrow\ell=1$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

Exercice 31

Partie 1 :

1) Montrons que f est continue sur $]-1;+\infty[$ où $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ si $x\neq0$ et $f(0)=1$

La fonction f est continue sur les intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions continues en tout point de $]-1;+\infty[-\{0\}$ qui sont $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ et $x\longmapsto\ln(1+x)$

Et on a : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ signifie que la fonction f est continue en 0

For more visit: L9ray.com
CamScanner

Finalement la fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$

2) a- • Montrons que la fonction g est dérivable sur I

La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$

Et comme $[-|k|;|k|] \subset]-1;+\infty[$ (car $[-|k|;|k|] \subset \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$)

Alors elle est dérivable sur I

Par suite la fonction g est dérivable sur I en tant que somme de deux fonctions dérivables sur I

• Montrons que : $(\forall x \in I)\ ;\ g'(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

On a : $(\forall x \in I)\ ;\ g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 + x = \dfrac{1+(x-1)(1+x)}{x+1} = \dfrac{x^2}{1+x}$

b- Déduisons que : $(\forall x \in I)\ ;\ |g'(x)| \leqslant 2k^2$

Soit $x \in I$; on a : $|g'(x)| = \left|\dfrac{x^2}{1+x}\right| = \dfrac{x^2}{|1+x|}$

comme $x \in I \Longleftrightarrow |x| \leqslant |k|$ alors $x^2 \leqslant k^2$

Et on a : $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant x+1 \leqslant \dfrac{3}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x+1} \leqslant 2$$

Donc : $\dfrac{x^2}{|1+x|} = \dfrac{x^2}{1+x} \leqslant 2k^2$ c'est-à-dire $|g'(x)| \leqslant 2k^2$

Ainsi : $(\forall x \in I)\ ;\ |g'(x)| \leqslant 2k^2$

c- Montrons que : $\left|\ln(1+k) - k + \dfrac{k^2}{2}\right| \leqslant 2|k^3|$

k étant un réel non nul tel que $|k| \leqslant \dfrac{1}{2}$

La fonction g est continue sur $[0;k]$ (ou sur $[k;0]$) et dérivable sur $]0;k[$ telle que : $(\forall x \in I)\ ;\ |g'(x)| \leqslant 2k^2$

Donc; d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|g(k) - g(0)| \leqslant |k-0| \times 2k^2$

c'est-à-dire $\left|\ln(1+k) - k + \dfrac{k^2}{2}\right| \leqslant 2|k^3|$

3) Montrons que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$

Soit $x \in]-1;+\infty[$ et $x \neq 0$, on a : $f(0) = 1$

et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

Pour $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $x \neq 0$, on a d'après la question précédente :

$\left|\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right| \leqslant 2|x|^3$ par suite $\left|\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \dfrac{1}{2}\right| \leqslant 2|x|$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et comme $\lim\limits_{x\to 0} 2|x| = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{1}{2}$

signifie que la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$

4) Calcul de $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to -1^+} 1+x = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$

Par suite $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

Et on a : $f(x) = \dfrac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

• **Interprétation graphique :**

On a : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$

On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$

5) a- Montrons que : $(\forall x \in]-1;+\infty[)$; $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x)$

On considère la fonction φ définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$\varphi(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

La fonction φ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et on a :

$\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

Le tableau de variations de φ est :

x	-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
φ	‖ ↘		0	↗	

Donc : $(\forall x \in]-1;+\infty[)$; $\varphi(x) \geqslant 0$

D'où : $(\forall x \in]-1;+\infty[)$; $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

b- La fonction f est dérivable en tout point de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ et que :

$(\forall x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[)\ ;\ f'(x)=\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$

Or $(\forall x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[)\ ;\ \dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)<0$

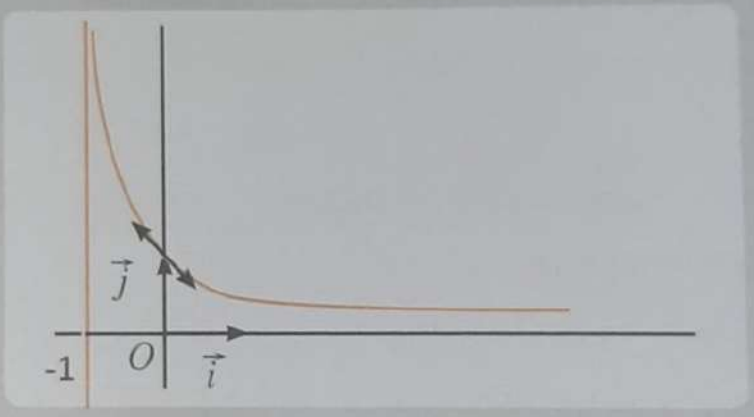
Donc $(\forall x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[)\ ;\ f'(x)<0$

Par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$

D'où le tableau de variations de f est comme suit :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	$+\infty$	↘	0

6) Le tracé



Partie 2 :

1) Montrons que : $(\forall t\in]-1;+\infty[)\ ;\ (1+t)^n\geqslant 1+nt$:

On considère la fonction φ définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$\varphi(t)=(1+t)^n-1-nt$

La fonction φ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et que :

$(\forall t>-1)\ ;\ \varphi'(t)=n(1+t)^{n-1}-n=n[(1+t)^{n-1}-1]$

Puisque : • $\varphi'(t)=0\iff t=0$

• $\varphi'(t)>0\iff t>0$

• $\varphi'(t)<0\iff -1<t<0$

Alors la fonction φ est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-1;0]$

Donc : $(\forall t\in[0;+\infty[)\ ;\ \varphi(t)\geqslant\varphi(0)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et $(\forall t \in]-1;0])$; $\varphi(t) \geqslant \varphi(0)$

D'où : $(\forall t \in]-1;+\infty[)$; $\varphi(t) \geqslant 0$ (car $\varphi(0)=0$)

Ainsi : $(\forall \in]-1;+\infty[)$; $(1+t)^n \geqslant 1+nt$

2) a- Montrons que : $(\forall n \geqslant 2)$; $\ln(u_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$

Soit $n \geqslant 2$; on a : $\ln(u_n) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Or : $f\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Donc : $\ln(u_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$

b- Montrons que la suite (u_n) est croissante

Soit $n \geqslant 2$; on a : $n+1 > n \Longrightarrow \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{n+1}\right) > f\left(\frac{1}{n}\right)$$

car la fonction f est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$

Donc : $\ln(u_{n+1}) > \ln(u_n) \Longrightarrow u_{n+1} > u_n$

Ainsi : $(\forall n \geqslant 2)$; $u_n \leqslant u_{n+1}$

signifie que la suite (u_n) est croissante

c- Montrons que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante

Soit $n \geqslant 2$; on a : $v_n > 0$

et $\ln(v_n) = \ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right) = -n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$

Et comme : $n+1 > n \Longrightarrow -\dfrac{1}{n} < \dfrac{-1}{n+1}$

$$\Longrightarrow f\left(-\frac{1}{n}\right) > f\left(-\frac{1}{n+1}\right)$$

Alors $\ln(v_n) > \ln(v_{n+1})$, d'où $v_n \geqslant v_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 2$

signifie que la suite (v_n) est décroissante

Et puisque qu'elle minorée par 0, alors elle est convergente

3) a- Montrons que : $(\forall n \geqslant 2)$; $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \dfrac{v_n}{n}$

Soit $n \geqslant 2$; on a :

$$v_n - u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) = v_n\left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)$$

Puisque $1-\dfrac{1}{n^2} \leqslant 1 \Longrightarrow \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n \leqslant 1$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant 1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Alors $v_n\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)\geqslant 0$ c'est-à-dire $0\leqslant v_n-u_n$

D'autre part on a : $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\geqslant 1-\frac{1}{n}$, d'après la partie 2 question 1)

Donc : $1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\leqslant\frac{1}{n}$ par suite $v_n\left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)\leqslant\frac{v_n}{n}$

c'est-à-dire $v_n-u_n\leqslant\frac{v_n}{n}$

D'où : $0\leqslant v_n-u_n\leqslant\frac{v_n}{n}$

Ainsi : $(\forall n\geqslant 2)\ ;\ 0\leqslant v_n-u_n\leqslant\frac{v_n}{n}$

b- Déduction :

On a : $(\forall n\geqslant 2)\ ;\ 0\leqslant v_n-u_n\leqslant\frac{v_n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n}=0$ (car (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$) donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n-u_n=0$

Et comme la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante

Alors les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Par conséquent elles sont convergentes et ont la même limite

4) a- Montrons que : $L\geqslant\frac{9}{4}$

La suite (u_n) est croissante, donc $u_2\leqslant u_n$ pour tout $n\geqslant 2$

Or $u_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

Par suite $\frac{9}{4}\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$, c'est-à-dire $L\geqslant\frac{9}{4}$

b- Déterminons la valeur de L

On a : $(\forall n\geqslant 2)\ ;\ \ln(u_n)=f\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

et puisque le fonction f est continue en 0 alors $\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)=1$, par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=1$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e$, c'est-à-dire : $L=e$

Exercice 32

Partie 1 :

1) a- Montrons que g est continue à droite en $-\frac{1}{2}$:

Soit $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, on a : $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

On pose : $X=1+2x$, donc $x\longrightarrow\left(-\frac{1}{2}\right)^+\iff X\longrightarrow 0^+$

Par suite $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}(1+2x)\ln(1+2x)=\lim\limits_{X\to 0^+}X\ln(X)=0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où : $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}(2x-(1+2x)\ln(1+2x))=-1$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}g(x)=g\left(-\frac{1}{2}\right)$, signifie que la fonction g est continue à droite en $-\frac{1}{2}$

b- Étudions la dérivabilité de g à droite en $-\frac{1}{2}$:

Soit $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, on a :

$$\frac{g(x)-g\left(-\frac{1}{2}\right)}{x+\frac{1}{2}}=\frac{2x+1-(1+2x)\ln(1+2x)}{\frac{1}{2}(2x+1)}=2(1-\ln(1+2x))$$

Puisque $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}1+2x=0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\ln(X)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\ln(1+2x)=-\infty$

Par suite $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}2(1-\ln(1+2x))=+\infty$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\dfrac{g(x)-g\left(-\frac{1}{2}\right)}{x+\frac{1}{2}}=+\infty$

signifie que g n'est pas dérivable à droite en $-\frac{1}{2}$

Interprétation géométrique : La courbe (C) admet une demi-tangente verticale à droite en son point d'abscisse $-\frac{1}{2}$, dirigée vers le haut

c- Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$:

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $g(x)=x\left(2-\left(\frac{1}{x}+2\right)\ln(1+2x)\right)$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2x)=+\infty$ alors

$\lim\limits_{x\to+\infty}2-\left(2+\frac{1}{x}\right)\ln(1+2x)=-\infty$ par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2-\left(2+\frac{1}{x}\right)\ln(1+2x)=-\infty$

Interprétation graphique : On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=-\infty$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2) a- • Montrons que g est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

La fonction $u : x\longmapsto 1+2x$ est dérivable et strictement positive sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

alors la fonction $(\ln ou)$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc la fonction $f : x \longmapsto 2x-(1+2x)\ln(1+2x)$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables

• Calcul de $g'(x)$ où $x > -\frac{1}{2}$:

Soit $x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, on a :

$$g'(x) = (2x-(1+2x)\ln(1+2x))' = 2-2\ln(1+2x)-(1+2x)\times\frac{2}{1+2x}$$
$$= -2\ln(1+2x)$$

Ainsi : $\left(\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$; $g'(x) = -2\ln(1+2x)$

b- Tableau de variations de g :

• Signe de $g'(x)$:

Soit $x > -\frac{1}{2}$; on a :

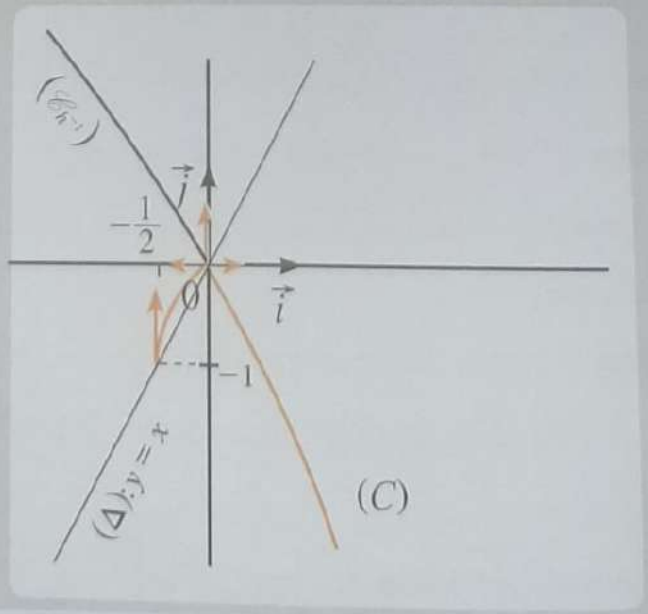
• $g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(1+2x) = 0$
$\Longleftrightarrow x = 0$

• $g'(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln(1+2x) < 0$
$\Longleftrightarrow 0 < 1+2x < 1$
$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0$

Donc le tableau de variations de g est :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	
g		↗	0	↘	
	-1				$-\infty$

c- La tracé



For more visit: L9ray.com
CamScanner

3) a- Montrons que h est une bijection de $[0;+\infty[$ vers $]-\infty;0]$

La fonction h est la restriction de g sur $[0;+\infty[$, donc h est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

Par conséquent elle réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers $h([0;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} h(x); h(0)\right] =]-\infty;0]$

b- Montrons que h^{-1} est dérivable sur $]-\infty;0[$:

La fonction h est dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que $h'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$, donc la fonction h^{-1} est dérivable sur $h(]0;+\infty[) =]-\infty;0[$

c- Étude de la dérivabilité de h^{-1} à gauche en 0 :

Soit $x \in]-\infty;0[$; on a : $h^{-1}(0) = 0$ et $\dfrac{h^{-1}(x) - h^{-1}(0)}{x-0} = \dfrac{h^{-1}(x)}{x}$

On pose : $t = h^{-1}(x)$ équivaut à $x = h(t)$

Et on a : $x \longrightarrow 0^- \iff t \longrightarrow 0^+ \ (x < 0 \Longrightarrow h^{-1}(x) > h^{-1}(0))$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{h^{-1}(x)}{x} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t}{h(t)} = -\infty$ (car $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{h(t)}{t} = 0$ et $\dfrac{h(t)}{t} < 0$)

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{h^{-1}(x) - h^{-1}(0)}{x-0} = -\infty$ signifie que h^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 0

d- Le tracé: voir figure précédente ((c_h) et $c_{h^{-1}}$ sont symétrique par rapport à la droite $(\Delta): y = x$)

4) a- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]-\infty;0[)$ tel que : $h^{-1}(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$

La fonction h^{-1} est une bijection de $]-\infty;0[$ dans $]0;+\infty[$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\dfrac{1}{n} \in]0;+\infty[$ donc, il existe un unique réel α_n de $]-\infty;0[$ tel que $h^{-1}(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]-\infty;0[)$ tel que : $h^{-1}(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$

b- La monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $n+1 > n \Longrightarrow \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$

Et comme $h^{-1}(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$ et $h^{-1}(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ alors $h^{-1}(\alpha_{n+1}) < h^{-1}(\alpha_n)$

Puisque la fonction h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

alors : $h^{-1}(\alpha_{n+1}) < h^{-1}(\alpha_n) \Longrightarrow h(h^{-1}(\alpha_{n+1})) > h(h^{-1}(\alpha_n))$

$\Longrightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n < \alpha_{n+1}$

signifie que la suite (α_n) est strictement croissante

• Convergence de $(\alpha_n)_{n\geq 1}$

La suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par 0, donc elle est convergente

c- Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $h^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ équivaut à $\alpha_n = h\left(\frac{1}{n}\right)$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et la fonction h est continue en 0

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} h\left(\frac{1}{n}\right) = h(0) = 0$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$

Partie 2 :

1) Montrons que f est continue en 0 :

Soit $x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $x \neq 0$, on a : $f(x) = 2 \times \frac{\ln(1+2x)}{2x}$

On pose : $X = 2x$, donc $x \longrightarrow 0$ équivaut à $X \longrightarrow 0$

Alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2 \times \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 2 = f(0)$

c'est-à-dire la fonction f est continue en 0

2) a- On a : $a \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[- \{0\}$ et

$\left(\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$; $h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)\cdot x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)\cdot a^2$

• Calcul de $h_a(0)$ et $h_a(a)$:

On a : $h_a(0) = (\ln(1+2a) - 2a) \times 0 - (\ln(1) - 0) \times a^2 = 0$

et $h_a(a) = (\ln(1+2a) - 2a) \times a^2 - (\ln(1+2a) - 2a) \times a^2 = 0$

Donc : $h_a(0) = h_a(a) = 0$

• Montrons qu'il existe un réel b compris entre a et 0

tel que : $\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$

La fonction h_a est continue sur $[0;a]$ (ou sur $[a;0]$) et dérivable sur $]0;a[$ (ou sur $]a;0[$) telle que $h_a(0) = h_a(a)$

Donc, d'après le théorème de Rolle :

Il existe un réel b compris strictement entre 0 et a tel que $h'_a(b) = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Or : $(\forall x \in I)$; $h'_a(x) = 2x(\ln(1+2a)-2a) - \left(\frac{2}{1+2x}-2\right)a^2$

$= 2x(\ln(1+2a)-2a) + \frac{4a^2x}{1+2x}$

Donc : $h_a(b) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+2a)-2a = \frac{-2a^2}{1+2b}$ (car $b \neq 0$)

$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$

Ainsi, il existe un réel b compris strictement entre 0 et a tel que :

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

b- Déduction

Soit x un élément de $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $x \neq 0$, on a : $f(0) = 2$

et $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}-2\right) = \frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}$

• Si $x \in]0;+\infty[$ alors $(\exists b \in]0;x[)$ tel que : $\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} = \frac{-2}{1+2b}$

Comme $0 < b < x \Leftrightarrow 1 < 1+2b < 1+2x$ (d'après la question précédente)

$\Leftrightarrow -2 < \frac{-2}{1+2b} < \frac{-2}{1+2x}$

Alors : $(\forall x > 0)$; $-2 < \frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} < \frac{-2}{1+2x}$

Et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}(-2) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{-2}{1+2x}\right) = -2$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} = -2$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2$, signifie que f est dérivable à droite en 0

et $f'_d(0) = -2$

• Si $x \in \left]-\frac{1}{2};0\right[$ alors : $(\exists b \in]x;0[)$ tel que : $\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} = \frac{-2}{1+2b}$

Comme $x < b < 0 \Leftrightarrow 0 < 1+2x < 2b+1 < 1$

$\Leftrightarrow \frac{-2}{1+2x} < \frac{-2}{1+2b} < -2$

Ainsi : $\left(\forall x \in \left]-\frac{1}{2};0\right[\right) \frac{-2}{1+2x} < \frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} < -2$

Et on a : $\lim\limits_{x\to 0^-}(-2) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{-2}{1+2x}\right) = -2$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} = -2$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2$, signifie que la fonction f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -2$

Par conséquent la fonction f est dérivable à droite et à gauche en 0 avec

For more visit: L9ray.com CamScanner

$f'_s(0) = f'_d(0) = -2$

D'où la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = -2$

3) a- • Montrons que f est dérivable en tout $x \in I - \{0\}$

La fonction $u : x \longmapsto 1 + 2x$ est dérivable et strictement positive sur les deux intervalles $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ et $]0; +\infty[$, par suite la fonction $(\ln ou)$ est dérivable en tout point de $I - \{0\}$

Donc la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ est dérivable sur les intervalles $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ et $]0; +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables en tout point de $I - \{0\}$, qui sont $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \longmapsto \ln(1+2x)$

• Montrons que : $(\forall x \in I - \{0\})$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

Soit $x \in I - \{0\}$; on a :

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)' = \frac{\frac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x)}{x^2} = \frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}$$

Ainsi : $(\forall x \in I - \{0\})$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

• Calcul de $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} (1+2x) = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} \ln(1+2x) = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} = +\infty$; c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} f(x) = +\infty$

Et pour $x > 0$; on a : $f(x) = \dfrac{\ln\left(x\left(\frac{1}{x}+2\right)\right)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}+2\right)}{x}$

Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}+2\right)}{x} = 0$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

• **Interprétation graphique :**

On a : $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe (Γ)

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (Γ) au voisinage de $+\infty$

b- Tableau de variations de f

For more visit: L9ray.com CamScanner

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $I-\{0\}$, et on a :

$(\forall x \in I-\{0\})$; $g(x) < 0$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

D'où le tableau de variations de f est :

x	$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0

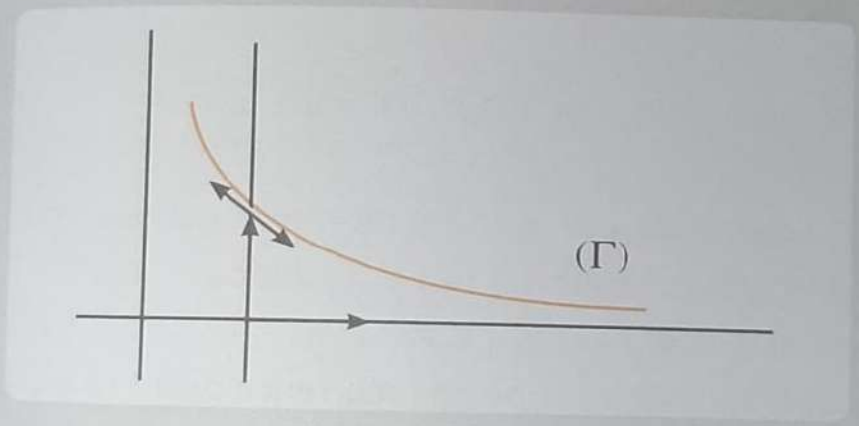
c- Montrons que : $(\exists!\alpha \in [1;2])$; $f(\alpha) = 1$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1;2]$

Et on a $f(1) = \ln(3)$ et $f(2) = \frac{\ln(5)}{2}$ et comme $3 > e \Longrightarrow \ln(3) > 1$ et $5 < e^2 \Longrightarrow \ln(5) < 2$ alors $f(2) < 1 < f(1)$

Donc d'après T.V.I $(\exists!\alpha \in [1;2])$; $f(\alpha) = 1$

d- Le tracé



Partie 3 :

1) a- • Montrons que φ est dérivable sur I :

La fonction $u : x \longmapsto 1+2x$ est dérivable et strictement positive sur I

Donc la fonction $\varphi = (\ln ou)$ est dérivable sur I

• Montrons que : $(\forall x \geqslant 1)$; $0 < \varphi'(x) \leqslant \frac{2}{3}$

On a : $(\forall x \geqslant 1)$; $\varphi'(x) = \frac{2}{1+2x}$

Donc : $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in [1; +\infty[$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et on a : $x \geqslant 1 \Longrightarrow 2x+1 \geqslant 3$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{2x+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$

Donc : $\varphi'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$ pour tout $x \in [1;+\infty[$

D'où : $(\forall x \in [1;+\infty[) \ ; \ 0 < \varphi'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$

b- • Vérifions que : $\varphi(\alpha) = \alpha$

On a : $f(\alpha) = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} = 1$

$\Longleftrightarrow \ln(1+2\alpha) = \alpha$

$\Longleftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha$

Donc : $\varphi(\alpha) = \alpha$

• Vérifions que : $\varphi(J) \subset J$

Comme la fonction φ est continue et strictement croissante sur J

alors $\varphi(J) = \varphi([1;\alpha]) = [\varphi(1);\varphi(\alpha)] = [\varphi(1);\alpha]$

Or $\varphi(1) = \ln(3)$ et $3 > e$ alors $\ln(3) > 1$ donc $[\ln(3);\alpha] \subset [1;\alpha]$

D'où : $\varphi(J) \subset J$

2) a- Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n \in J$

Initialisation :

• Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $1 \in [1;\alpha]$, donc $u_0 \in J$

Hérédité :

• Soit $n \in J$, supposons que $u_n \in J$ et montrons que $u_{n+1} \in J$

On a : $u_n \in J$ et $\varphi(J) \subset J$ alors $\varphi(u_n) \in J$, donc $u_{n+1} \in J$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n \in J \Longrightarrow u_{n+1} \in J$

• **Conclusion :** D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n \in J$

b- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$

puisque la fonction φ est continue sur $J = [1;\alpha]$ et dérivable sur $]1;\alpha[$ tel que $0 < \varphi'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$ pour tout $x \in]1;\alpha[$, alors d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$(\forall (a;b) \in J^2) \ ; \ |\varphi(a) - \varphi(b)| \leqslant \dfrac{2}{3}|a-b|$

En prenant : $a = u_n$ et $b = \alpha$, on obtient alors :

$|\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$

Comme $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ et $\varphi(\alpha) = \alpha$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

c- Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Initialisation :

• Pour $n = 0$, on a : $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = \alpha - 1$ et $\alpha - 1 \leqslant 1$

en plus $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$. Donc $|u_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^0$

Hérédité :

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que :

$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

On a : $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \Longrightarrow \frac{2}{3}|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Et on a, d'après la question précédente $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

Donc : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

• **Conclusions :** D'après le principe de récurrence, on a :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$

d- **Déduction :**

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Et comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Par suite la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

5 Leçon Nombres complexes

Maxi

Résumé

I Forme algébrique d'un nombre complexe - opérations dans $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \{z = a + bi / a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ tel que i est un nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$.

- i est une solution l'équation $x^2 + 1 = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux nombres réels. Cette forme : $a + bi$ est appelée la forme algébrique du nombre complexe z.
- Le réel a est appelé la partie réelle de z et notée : $\mathrm{Re}(z)$
- Le réel b est appelé la partie imaginaire de z et notée: $\mathrm{Im}(z)$
- Si $a = 0$ alors $z = bi$, on dit dans ce cas: z est imaginaire pur.
- L'ensemble des nombres imaginaires purs se note $i\mathbb{R}$ et on a :

$$i\mathbb{R} = \{bi \ / b \in \mathbb{R}\}$$

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$
- Égalité de deux nombres complexes: soit z et z' deux nombres complexes :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

- En particulier : $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

(où a et b sont deux nombres réels)

C'est-à-dire: $z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$

- Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ où a ; b ; a' et b' sont des réels.

$z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$	(L'addition)
$-z = -(a + bi) = -a - bi$	(L'opposé)
$z \times z' = (a + bi) \times (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$	(Le produit)
$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$	(L'inverse)
$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = (a + bi) \times \left(\frac{a' - b'i}{a'^2 + b'^2}\right) = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}i$	(Le quotient)

For more visit: L9ray.com CamScanner

$z^3=(a+bi)^3=a^3+2abi+(bi)^2=a^3+2abi-b^2$ $=a^3-b^2+2abi$	Identités remarquables
$(z+z')^2=z^2+2zz'+z'^2$	
$(z-z')^2=z^2-2zz'+z'^2$	
$z^2-z'^2=(z-z')(z+z')$	
$(z+z')^3=z^3+3z^2z'+3zz'^2+z'^3$	
$(z-z')^3=z^3-3z^2z'+3zz'^2-z'^3$	
$z^3-z'^3=(z-z')(z^2+zz'+z'^2)$	
$z^3+z'^3=(z+z')(z^2-zz'+z'^2)$	

Exercices d'application

Exercice 1

On pose: $z_1=3+2i$, $z_2=-1+3i$ et $z_3=1-i$

Écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants:

$z_4=z_1+z_2+z_3$, $z_5=z_1-3z_2$, $z_6=iz_1^2$, $z_7=-iz_3^3$, $z_8=z_1\times z_2$, $z_9=z_2^4$, $z_{10}=\frac{1}{z_2}$ et $z_{11}=\frac{z_1}{z_3}$

Exercice 2

Déterminer les valeurs du nombre réel λ pour que le nombre $z=(\lambda+i)(\lambda+5-i(\lambda-7))$ soit un imaginaire pur.

Exercice 3

On pose : $A(z)=z^2+2z+2$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1) Écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants : $A(i)$; $A(1+i)$ et $A(2i-3)$.

2) On pose : $z=x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

a) Déterminer, en fonction de x et y, les nombres $\mathrm{Re}(A(z))$ et $\mathrm{Im}(A(z))$.

b) Montrer que : $A(z)\in\mathbb{R}\iff(x=-1 \text{ ou } y=0)$

Exercice 4

On pose : $S_n=1+i+i^2+\ldots+i^n$ avec $n\in\mathbb{N}$.

1) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $S_n-iS_n=1-i^{n+1}$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) En déduire que : $S_n = \dfrac{1-i^{n+1}}{1-i}$

2) Déterminer la valeur de S_n dans chacun des cas suivants :

$n = 4p$; $n = 4p+1$; $n = 4p+2$ et $n = 4p+3$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Solutions

Exercice 1

On a : $z_1 = 3+2i$, $z_2 = -1+3i$ et $z_3 = 1-i$

Donc: $z_4 = z_1 + z_2 + z_3$
$= (3+2i)+(-1+3i)+(1-i)$
$= (3-1+1)+(2+3-1)i$
$= 3+4i$

Et $z_5 = z_1 - 3z_2$
$= (3+2i)-3(-1+3i)$
$= 3+2i+3-9i$
$= (3+3)+(2i-9i)$
$= 6-7i$

Et $z_6 = iz_1^2$
$= i(3+2i)^2$
$= i(9+2\times 3\times 2i+(2i)^2)$
$= i(9+12i-4)$
$= i(5+12i)$
$= 5i+12i^2$
$= 5i-12 = -12+5i$

info:
$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Et $z_7 = -iz_3^3$
$= -i(1-i)^3$
$= -i(1^3-3\times 1^2\times i+3\times 1\times i^2-i^3)$
$= -i(1-3i-3+i)$
$= -i(-2-2i)$
$= 2i+2i^2$
$= -2+2i$

Et $z_8 = z_1 \times z_2$
$= (3+2i)\times(-1+3i)$
$= -3+9i-2i+6i^2$
$= -3+7i-6$
$= -9+7i$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et $z_9 = z_3^4$

$= (-1+3i)^4$

$= (-1+3i)^2 \times (-1+3i)^2$

$= (1 - 2\times 3i + (3i)^2) \times (1 - 6i + (3i)^2)$

$= (1 - 6i - 9)(1 - 6i - 9)$

$= (-8 - 6i) \times (-8 - 6i)$

$= (8+6i)^2$

$= 8^2 + 2\times 8 \times 6i + (6i)^2$

$= 64 + 96i - 36$

$= 28 + 96i$

Et $z_{10} = \dfrac{1}{z_2}$

$= \dfrac{1}{-1+3i}$

$= \dfrac{-1-3i}{(-1+3i)(-1-3i)}$

$= \dfrac{-1-3i}{(-1)^2+3^2} = \dfrac{-1-3i}{1+9} = -\dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}i$

Et $z_{11} = \dfrac{z_1}{z_3}$

$= \dfrac{3+2i}{1-i}$

$= \dfrac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$= \dfrac{3+3i+2i+(2i\times i)}{1^2+1^2}$

$= \dfrac{3+5i-2}{1+1}$

$= \dfrac{1+5i}{2}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$

info:
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exercice 2

Soit λ un réel,

• Écrivons z sous forme algébrique :

$z = (\lambda+i)(\lambda+5-i(\lambda-7))$

$= \lambda(\lambda+5) + (\lambda-7) - i\lambda(\lambda-7) + i(\lambda+5)$

$= (\lambda^2+6\lambda-7) + i(-\lambda^2+8\lambda+5)$

Puisque $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Re}(z) = \lambda^2 + 6\lambda - 7$

For more visit: L9ray.com
CamScanner

et $\text{Im}(z) = -\lambda^2 + 8\lambda + 5$.

- $z \in (i\mathbb{R}) \iff \text{Re}(z) = 0$
  $\iff \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0$
  $\iff (\lambda - 1)(\lambda + 7) = 0$
  $\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -7$

Donc : z est un imaginaire pur si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -7$.

Exercice 3

1) Forme algébrique de $A(i)$; $A(1+i)$ et $A(2i-3)$:

On a : $A(z) = z^2 + 2z + 2$

Donc :

- $A(i) = i^2 + 2i + 2 = -1 + 2i + 2 = 1 + 2i$
- $A(1+i) = (1+i)^2 + 2(1+i) + 2$
  $= (1 + 2i + i^2) + 2 + 2i + 2$
  $= 2i + 2i + 4$
  $= 4 + 4i$
- $A(2i-3) = (2i-3)^2 + 2(2i-3) + 2$
  $= (-4 - 12i + 9) + 4i - 4$
  $= 1 - 8i$

2) a) Exprimons $\text{Re}(A(z))$ et $\text{Im}(A(z))$ en fonction de x et y :

$$A(z) = (x+yi)^2 + 2(x+yi) + 2$$
$$= x^2 + 2xyi - y^2 + 2x + 2yi + 2$$
$$= (x^2 - y^2 + 2x + 2) + i(2xy + 2y)$$

Puisque x et y sont des réels, alors :

$$(x^2 - y^2 + 2x + 2) \in \mathbb{R} \text{ et } (2xy + 2y) \in \mathbb{R}$$

Donc : $\begin{cases} \text{Re}(A(z)) = x^2 - y^2 + 2x + 2 \\ \text{Im}(A(z)) = 2xy + 2y \end{cases}$

b) Montrons que : $A(z) \in \mathbb{R} \iff x = -1$ ou $y = 0$

$A(z) \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(A(z)) = 0$
$\iff 2xy + 2y = 0$
$\iff 2y(x+1) = 0$
$\iff y = 0$ ou $x = -1$

Donc : $A(z) \in \mathbb{R} \iff x = -1$ ou $y = 0$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 4

1) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $S_n - iS_n = 1 - i^{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$;

On a : $S_n = 1 + i + i^2 + \ldots + i^{n-1} + i^n$

Donc : $iS_n = i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n + i^{n+1}$

D'où : $S_n - iS_n = 1 - i^{n+1}$, après simplification.

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n - iS_n = 1 - i^{n+1}$

b) Déduisons S_n en fonction de n :

Soit $n \in \mathbb{N}$; $S_n - iS_n = 1 - i^{n+1} \Rightarrow (1-i)S_n = 1 - i^{n+1}$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$

2) Déterminons les valeurs de S_n dans les cas : $n = 4p$; $n = 4p+1$; $n = 4p+2$ et $n = 4p+3$

Soit $n \in \mathbb{N}$; $S_n = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$

Soit $p \in \mathbb{N}$;

• Si $n = 4p$, alors : $i^{n+1} = i^{4p+1} = (i^4)^p \times i = i$

Dans ce cas : $S_n = \frac{1 - i}{1 - i} = 1$

• Si $n = 4p+1$, alors : $i^{n+1} = i^{4p+2} = (i^4)^p \times i^2 = -1$

Dans ce cas : $S_n = \frac{1+1}{1-i} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1 + i$

• Si $n = 4p+2$, alors : $i^{n+1} = i^{4p+3} = i^{4p+2} \times i = -1 \times i = -i$

Dans ce cas : $S_n = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$

• Si $n = 4p+3$, alors : $i^{n+1} = i^{4p+4} = i^{4p+3} \times i = -i \times i = 1$

Dans ce cas : $S_n = \frac{1-1}{1-i} = 0$

Résumé : Pour $p \in \mathbb{N}$, on a:

$S_n = 1$ si $n = 4p$

$S_n = 1 + i$ si $n = 4p+1$

$S_n = i$ si $n = 4p+2$

$S_n = 0$ si $n = 4p+3$

For more visit: L9ray.com CamScanner

II Conjugué d'un nombre complexe

Définition:

z est un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ (où x et y sont des réels), le nombre complexe $x - iy$, noté $\overline{z}$ est appelé le conjugué de z.

$\overline{z} = \overline{x + yi} = x - yi$

Propriétés:

Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$ on a :

$\overline{z} = z$; $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$; $z \neq 0$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $z' \neq 0$; $(\forall n \in \mathbb{Z})$ $z \neq 0$; $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$; $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$; $z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

$z + \overline{z} \in \mathbb{R}$; $(z - \overline{z}) \in i\mathbb{R}$; $z \times \overline{z} \in \mathbb{R}^+$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Remarque:

Soit $z = x + iy$ tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$; $z + \overline{z} = 2x$; $z - \overline{z} = 2yi$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0$

Exercices d'application

Exercice 5

Soit z un nombre complexe.

Écrire en fonction de z et $\overline{z}$ le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$Z_1 = iz + 1$; $Z_2 = z^2 + i\overline{z} - 5$; $Z_3 = (3\overline{z} - 1)(z + i)$; $Z_4 = \frac{2z - i}{1 - \overline{z}}$; avec $z \neq 1$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(1 - i\overline{z})(z^2 + 2z + 1)(z - \overline{z}) = 0$

2) $2z + i\overline{z} = 5 - 4i$

3) $\frac{2\overline{z} - 1}{z + i} = 1 + i$

4) $\frac{\overline{z} + i}{\overline{z} - 2} = \frac{z - i}{z + 1}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 7

Soit z un nombre complexe.

1) a) Montrer que le nombre $A = z^2 - \overline{z}^2$ est un imaginaire pur.

b) Montrer que le nombre $B = z^n + (\overline{z})^n$ est un réel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $a \in \mathbb{R}^*$, on pose :

$X = (1+ia)^n + (1-ia)^n$

$Y = (a+i)^n - (a-i)^n$

a) Montrer que X est un réel.

b) Montrer que Y est un imaginaire pur.

Exercice 8

Soit $z \in \mathbb{C}$.

On pose : $A(z) = z^2 + 2z + 2$

Montrer que : $(A(z) \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R}$ ou $\mathrm{Re}(z) = -1)$

Exercice 9

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Montrer que : $\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = \overline{z}$ ou $z + \overline{z} = 2z\,\overline{z})$

Solutions

Exercice 5

Exprimons en fonction de z et $\overline{z}$ le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

- $Z_1 = iz + 1$

Donc : $\overline{Z_1} = \overline{iz+1}$

$= \overline{i} \times \overline{z} + \overline{1}$

$= -i\,\overline{z} + 1$

- $Z_2 = z^2 + i\,\overline{z} - 5$

Donc : $\overline{Z_2} = \overline{z^2 + i\,\overline{z} - 5}$

$= \overline{z}^2 + \overline{i}\,\overline{\overline{z}} - 5$

$= (\overline{z})^2 + \overline{i} \times \overline{\overline{z}} - 5$

$= (\overline{z})^2 - iz - 5$

- $Z_3 = (3\overline{z} - 1)(z + i)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\overline{Z_3} = \overline{(3\bar{z}-1)(z+i)}$

$= \overline{(3\bar{z}-1)} \times \overline{(z+i)}$

$= (3z-1)(\bar{z}-i)$

- $Z_4 = \dfrac{2z-i}{1-\bar{z}}$

Donc : $\overline{Z_4} = \left(\overline{\dfrac{2z-i}{1-\bar{z}}}\right)$

$= \dfrac{\overline{2z-i}}{\overline{1-\bar{z}}}$

$= \dfrac{2\bar{z}+i}{1-z}$

Exercice 6

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(E_1): (1-i\bar{z})(z^2+2z+1)(z-\bar{z}) = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow (1-i\bar{z}=0 \text{ ou } z^2+2z+1=0 \text{ ou } z-\bar{z}=0)$

$\Leftrightarrow \left(\bar{z} = \dfrac{1}{i} = -i \text{ ou } (z+1)^2 = 0 \text{ ou } z = \bar{z}\right)$

$\Leftrightarrow (z = i \text{ ou } z = -1 \text{ ou } z \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \cup \{i\}$

Donc : $S = \mathbb{R} \cup \{i\}$

2) $(E_2): 2z + i\bar{z} = 5 - 4i$

On pose : $z = x + yi$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$(E_2) \Leftrightarrow 2x + 2yi + i(x - yi) = 5 - 4i$

$\Leftrightarrow (2x+y) + (2y+x)i = 5 - 4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 5 \\ x+2y = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left(x = \dfrac{14}{3} \text{ et } y = -\dfrac{13}{3}\right)$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{14}{3} - \dfrac{13}{3}i$

Donc : $S = \left\{\dfrac{14}{3} - \dfrac{13}{3}i\right\}$

3) $(E_3): \dfrac{2\bar{z}-1}{z+i} = 1+i$

- Cette équation n'est définie que si $z \neq -i$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Résolution : $\frac{2\overline{z}-1}{z+i}=1+i \iff 2\overline{z}-1=(1+i)(z+i)$

$\iff 2\overline{z}-(1+i)z=1+i(1+i)$

$\iff 2(x-yi)-(1+i)(x+yi)=i$

(avec $z=x+yi$; $(x;y)\in\mathbb{R}^2$)

$\iff (x+y)+(-3y-x-1)i=0$

$\iff \begin{cases} x+y=0 \\ -3y-x-1=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\iff z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$

4) (E_4): $\frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-2}=\frac{z-i}{z+1}$

• Cette équation n'est définie que si $z\neq 2$ et $z\neq -1$.

• Résolution : soit $z\in\mathbb{C}-\{-1;2\}$

On pose : $z=x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

$(E_4)\iff(\overline{z}+i)(z+1)=(\overline{z}-2)(z-i)$

$\iff \overline{z}+i\overline{z}+iz+2z=i$

$\iff (1+i)\overline{z}+(2+i)z=i$

$\iff (1+i)(x-yi)+(2+i)(x+yi)=i$

$\iff 3x+(2x+y)i=i$

$\iff \begin{cases} 3x=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

$\iff (x=0 \text{ et } y=1)$

$\iff z=i$

Donc : $S=\{i\}$

Exercice 7

1) a) Montrons que : $A\in i\mathbb{R}$

Méthode 1: $(A\in i\mathbb{R}\iff \overline{A}=-A)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$A = z^2 - \overline{z}^2 \Rightarrow \overline{A} = \overline{z^2} - \overline{\overline{z}^2}$

$\Rightarrow \overline{A} = \overline{z}^2 - z^2$

$\Rightarrow \overline{A} = -A$

$\overline{A} = -A$, donc A est un imaginaire pur.

Méthode 2: $A = z^2 - \overline{z}^2$

$= (z - \overline{z})(z + \overline{z})$

$= (2i\,\mathrm{Im}(z)) \times (2\,\mathrm{Re}(z))$

$= 4i\,\mathrm{Im}(z) \times \mathrm{Re}(z)$

et puisque $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$, alors A est un imaginaire pur.

b) Montrons que B est un réel.

Méthode 1: $B = z^n + (\overline{z})^n$

$= z^n + \overline{z^n}$

$= 2\,\mathrm{Re}(z^n)$

Donc : B est un réel.

Méthode 2: $(B \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{B} = B)$

$B = z^n + \overline{z}^n \Rightarrow \overline{B} = \overline{z^n} + \overline{\overline{z}^n}$

$\Rightarrow \overline{B} = \overline{z}^n + z^n$

$\Rightarrow \overline{B} = B$

$\overline{B} = B$, donc B est un réel tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Montrons que : $X \in \mathbb{R}$

$X = (1 + ia)^n + (1 - ia)^n$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

Méthode 1: $X = (1 + ia)^n + \overline{(1 + ia)^n} = 2\,\mathrm{Re}((1 + ia)^n)$

Donc : X est un réel.

Méthode 2: $\overline{X} = \overline{(1 + ia)^n + (1 - ia)^n}$

$= \overline{(1 + ia)^n} + \overline{(1 - ia)^n}$

$= (1 - ia)^n + (1 + ia)^n$

$= X$

$\overline{X} = X$, donc X est un réel.

b) Montrons que $Y \in i\mathbb{R}$:

$Y = (a + i)^n - (a - i)^n$

Méthode 1: $Y = (a + i)^n - \overline{(a + i)^n} = 2i\,\mathrm{Im}((a + i)^n)$

Donc Y est un imaginaire pur.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Méthode 2: $\overline{Y}=\overline{(a+i)^n-(a-i)^n}$

$=\overline{(a+i)^n}-\overline{(a-i)^n}$

$=(a-i)^n-(a+i)^n$

$=-[(a+i)^n-(a-i)^n]$

$=-Y$

$\overline{Y}=-Y$, donc Y est un imaginaire pur.

Exercice 8

$A(z)=z^2+2z+2\ ;\ z\in\mathbb{C}$

Montrons que : $(A(z)\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(z\in\mathbb{R}\text{ ou }\mathrm{Re}(z)=-1)$

Soit $z\in\mathbb{C}$; $A(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{A(z)}=A(z)$

$\Leftrightarrow\overline{z^2+2z+2}=z^2+2z+2$

$\Leftrightarrow\overline{z}^2+2\overline{z}=z^2+2z$

$\Leftrightarrow z^2-\overline{z}^2+2z-2\overline{z}=0$

$\Leftrightarrow(z-\overline{z})(z+\overline{z})+2(z-\overline{z})=0$

$\Leftrightarrow(z-\overline{z})(z+\overline{z}+2)=0$

$\Leftrightarrow z=\overline{z}$ ou $z+\overline{z}=-2$

$\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ ou $2\,\mathrm{Re}(z)=-2$

$\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ ou $\mathrm{Re}(z)=-1$

Donc : $(A(z)\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(z\in\mathbb{R}\text{ ou }\mathrm{Re}(z)=-1)$

Exercice 9

Montrons que : $\frac{2z-1}{z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(z=\overline{z}\text{ ou }z+\overline{z}=2z\,\overline{z})$

Soit $z\in\mathbb{C}^*$; on pose : $Z=\frac{2z-1}{z^2}$

$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{Z}=Z$

$\Leftrightarrow\frac{2\overline{z}-1}{\overline{z}^2}=\frac{2z-1}{z^2}$

$\Leftrightarrow(2\overline{z}-1)z^2=\overline{z}^2(2z-1)$

$\Leftrightarrow 2\overline{z}z^2-z^2=2z\,\overline{z}^2-\overline{z}^2$

$\Leftrightarrow 2z\,\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})(z+\overline{z})=0$

$\Leftrightarrow(z-\overline{z})[2z\overline{z}-(z+\overline{z})]=0$

$\Leftrightarrow z=\overline{z}$ ou $2z\overline{z}=z+\overline{z}$

Donc : $\frac{2z-1}{z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(z=\overline{z}\text{ ou }z+\overline{z}=2z\,\overline{z})$

For more visit: L9ray.com CamScanner

III Représentation géométrique d'un nombre complexe

Définition:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

- À tout nombre complexe $z = x + yi$, avec x et y des réels, on associe le point M de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ du plan, appelé plan complexe.

On dit que M est le point image du nombre complexe z (ou le point M est l'image du nombre complexe z) et on écrit: $M(z)$,

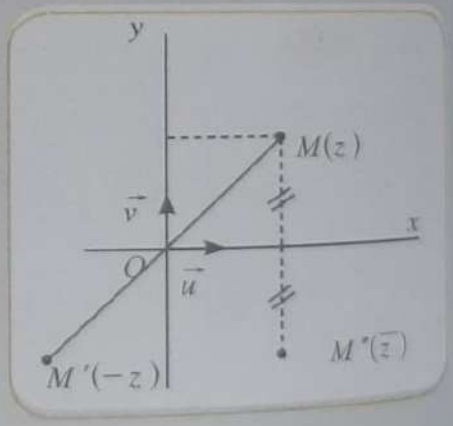
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z, et on écrit $\overrightarrow{OM}(z)$

- Inversement, à tout point $M(x;y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x + iy$.

On dit que z est l'affixe du point M, et on note z_M. On dit aussi que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, et on note $z_{\overrightarrow{OM}}$.

- Si A et B sont deux points du plan, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ on écrit: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- L'affixe du point S tel que: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ est $z_S = z_M + z_{M'}$ (le quadrilatère $OMSM'$ est un parallélogramme).

- ($ABCD$ est un parallélogramme) $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
  $\iff (z_B - z_A = z_C - z_D)$
- L'affixe du point P tel que : $\overrightarrow{OP} = k.\overrightarrow{OM}$ avec k réel, est $z_P = kz$.
- Les deux points $M(z)$ et $M'(-z)$ sont symétriques par rapport au point O (l'origine du repère).
- Les deux points $M(z)$ et $M''(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe réel (l'axe des abscisses).



- L'affixe du point I milieu du segment $[AB]$ est le nombre complexe:

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ est un réel.

(A, B et C sont alignés) $\iff (\exists k \in \mathbb{R})\ ;\ \overrightarrow{BA} = k.\overrightarrow{CA}$
$\iff (\exists k \in \mathbb{R})\ ;\ z_A - z_B = k(z_A - z_C)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercices d'application

Exercice 10

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = 3+2i$; $z_B = -2+5i$ et $z_C = -5+2i$.

1) Placer les points A, B et C.

2) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3) a) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

b) Déterminer l'affixe du centre I de ce parallélogramme.

4) Déterminer l'affixe du point G barycentre des points $(A,2)$; $(B,3)$ et $(C,-1)$.

Exercice 11

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Soit z un nombre complexe non nul.

On considère les points $M(z)$; $N(\overline{z})$; $P(-z)$ et $Q(-\overline{z})$.

1) Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?

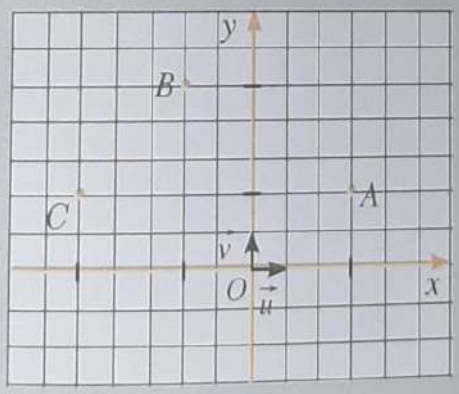
2) Donner, en fonction de z l'affixe du point K défini par :

$$2\overrightarrow{MK} - 3\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{PM} = 5\overrightarrow{OP}.$$

Solutions

Exercice 10

1) Figure :



2) Affixe des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$:

• $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (-2+5i)-(3+2i) = -5+3i$

Donc : $\overrightarrow{AB}(-5+3i)$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-5;3)$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

• $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = (-5+2i)-(3+2i) = -8$

Donc : -8 est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-8;0)$.

• De même on montre que $\overrightarrow{BC}(-3-3i)$

donc : $\overrightarrow{BC}(-3;-3)$

3) a) Affixe du point D :

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \iff z_D - z_A = z_{\overrightarrow{BC}}$$
$$\iff z_D = z_A - 3 - 3i$$
$$\iff z_D = 3 + 2i - 3 - 3i$$
$$\iff z_D = -i$$

Donc le point D a pour affixe $-i$, ses coordonnées sont $(0;-1)$.

b) Affixe du point I :

$ABCD$ est un parallélogramme, donc son centre I est le milieu de ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

$$I \text{ milieu de } [AC] \iff z_I = \frac{z_A + z_C}{2}$$
$$\Rightarrow z_I = \frac{3+2i-5+2i}{2}$$
$$\Rightarrow z_I = -1+2i$$

Donc le point I a pour affixe $-1+2i$, ses coordonnées sont $(-1;2)$.

4) Affixe du point G :

G est le barycentre des points $(A,2)$; $(B,3)$ et $(C,-1)$,

donc : $z_G = \frac{2z_A + 3z_B - z_C}{2+3-1} = \frac{5+17i}{4}$

Donc : $G\left(\frac{5}{4} + \frac{17}{4}i\right)$.

Exercice 11

1) Nature du quadrilatère $MNPQ$:

• $Z_{\overrightarrow{MN}} = z_N - z_M = \overline{z} - z$

• $Z_{\overrightarrow{QP}} = z_P - z_Q = -z - (-\overline{z}) = \overline{z} - z$

Donc : $z_{\overrightarrow{MN}} = Z_{\overrightarrow{QP}}$,

d'où : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ et par conséquent $MNPQ$ est un parallélogramme.

For more visit: L9ray.com CamScanner

De plus : $(MN)\perp(NP)$ (car $(MN)//(O;\vec{v})$ et $(NP)//(O;\vec{u})$ et $(O;\vec{u})\perp(O;\vec{v})$)

Donc : $MNPQ$ est un rectangle.

2) Affixe du point K : $2\overrightarrow{MK}-3\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{PM}=5.\overrightarrow{OP}$ (*)

$(*)\Leftrightarrow 2(z_K-z_M)-3(z_N-z_K)+z_M-z_P=5z_P$

$\Leftrightarrow 5z_K=z_M+6z_P+3z_N$

$\Leftrightarrow z_K=\frac{1}{5}(z-6z+3\overline{z})$

$\Leftrightarrow z_K=-z+\frac{3}{5}\overline{z}$

Donc : $K\left(-z+\frac{3}{5}\overline{z}\right)$.

VI Module d'un nombre complexe

Définition:

Soit z un nombre complexe tel que: $z=x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

- Le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$ est appelé le module de z noté: $|z|$; et on a: $|z|=|x+yi|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}=OM$ où M est le point d'affixe z.

Propriétés:

Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$, on a :

- $|\overline{z}|=|z|=|-z|=|z|$ et $|z|=0\Leftrightarrow z=0$
- $|z\times z'|=|z|\times|z'|$; $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ avec $z\neq 0$; $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$ et $z\neq 0$
- $z\neq 0$; $(\forall n\in\mathbb{Z})$; $|z^n|=|z|^n$
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ et $|z-z'|\leq|z|+|z'|$ (Inégalité triangulaire).

Remarque :

- Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$ avec $z\neq 0$, on a : $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ et $\frac{z'}{z}=\frac{z'\times\overline{z}}{|z|^2}$
- $AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|$

Exercices d'application

Exercice 12

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad z_2=-\sqrt{3}+2i$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$z_3 = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ $\quad z_4 = z_1 \times z_2$

$z_5 = z_3^{2020}$; $z_6 = \frac{1}{z_4}$; $z_7 = \frac{z_2}{z_1}$; $z_8 = \overline{z_1} \times (-z_2)^3 \times \overline{z_3^2}$

Exercice 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Déterminer les ensembles suivants :

$E_1 = \{M(z) / |z + 3i + 2| = |1 + i|\}$

$E_2 = \{M(z) / |\overline{z} - 1 + 2i| = |z + 1 - i|\}$

$E_3 = \{M(z) / |z + \overline{z}| = |z|\}$

$E_4 = \{M(z) / (z - 2i)(\overline{z} + 2i) = 9\}$

$E_5 = \{M(z) / |z - 2 + i| \leq 2\}$

$E_6 = \left\{M(z) / \frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R}\right\}$

$E_7 = \left\{M(z) / \frac{z-2+i}{z+1-3i} \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 14

Soit z un nombre complexe tel que : $\overline{z} \neq z$.

Soit u un nombre complexe de module 1 tel que : $u \neq 1$.

Montrer que : $\frac{z - u\overline{z}}{1 - u}$ est un réel.

Exercice 15

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que :

$$|z_1| = |z_2| = 1 \text{ et } z_1 \times z_2 \neq -1$$

On pose : $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$

Montrer que Z est un réel.

Exercice 16

Montrer que : $\forall (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}(|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2)$

Exercice 17

Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C}) ; \frac{|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

Exercice 18

Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C}) ; |z| \leq 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(3 + 4z + z^2) \geq 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

Exercice 12

Calculons le module de chacun des nombres complexes suivants :

- $|z_1| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$
- $|z_2| = |-\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 4} = \sqrt{7}$
- $|z_3| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$
- $|z_4| = |z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = \sqrt{7}$
- $|z_5| = |z_3^{2020}| = |z_3|^{2020} = 1$
- $|z_6| = \left|\frac{1}{z_4}\right| = \frac{1}{|z_4|} = \frac{\sqrt{7}}{7}$
- $|z_7| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \sqrt{7}$
- $|z_8| = |\overline{z_1} \times (-z_2)^3 \times \overline{z_3^2}|$
  $= |\overline{z_1}| \times |-z_2^3| \times |\overline{z_3^2}|$
  $= |z_1| \times |z_2|^3 \times |z_3|^2$
  $= 7\sqrt{7}$ (car $|\overline{z}| = |z| = |-z|$)

Exercice 13

Déterminons les ensembles suivants :

- $E_1 = \{M(z) / |z + 3i + 2| = |1 + i|\}$

Méthode géométrique :

Soit $z \in \mathbb{C}$; $M(z) \in E_1 \iff |z - (-2 - 3i)| = |1 + i|$

$\iff AM = \sqrt{2}$ avec $A(-2 - 3i)$

$\iff M \in \mathscr{C}(A; \sqrt{2})$

Donc : E_1 est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

Méthode algébrique :

Soit $z \in \mathbb{C}$; on pose : $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$M(z) \in E_1 \iff |z + 3i + 2| = |1 + i|$

$\iff |(x + 2) + (y + 3)i| = \sqrt{2}$

$\iff (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 2$

$\iff M \in \mathscr{C}(A(-2; -3); \sqrt{2})$

Rappel :
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ est l'équation réduite du cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r.

For more visit: L9ray.com
CamScanner

Donc : E_1 est le cercle de centre $A(-2;-3)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

• $E_2 = \{M(z) / |\overline{z} - 1 + 2i| = |z + 1 - i|\}$

Méthode géométrique :

Soit $z \in \mathbb{C}$;

$$\begin{aligned} M(z) \in E_2 &\Leftrightarrow |\overline{z} - (1 - 2i)| = |z - (-1 + i)| \\ &\Leftrightarrow |\overline{z - (1 - 2i)}| = |z - (-1 + i)| \text{ ; (car } |z| = |\overline{z}|) \\ &\Leftrightarrow |z - (1 + 2i)| = |z - (-1 + i)| \\ &\Leftrightarrow AM = BM \text{ ; (avec } A(1 + 2i) \text{ et } B(-1 + i)) \end{aligned}$$

Donc : E_2 est la médiatrice du segment $[AB]$.

Méthode algébrique :

Soit $z \in \mathbb{C}$; $\exists!(x;y) \in \mathbb{R}^2 / z = x + yi$

$$\begin{aligned} M(z) \in E_2 &\Leftrightarrow |\overline{z} - 1 + 2i| = |z + 1 - i| \\ &\Leftrightarrow |(x - 1) + (2 - y)i| = |(x + 1) + (y - 1)i| \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (2 - y)^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow 4x + 2y - 3 = 0 \end{aligned}$$

Donc : E_2 est la droite d'équation $4x + 2y - 3 = 0$.

On peut vérifier que cette équation est bien celle de la médiatrice de $[AB]$.

• $E_3 = \{M(z) / |z + \overline{z}| = |z|\}$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = x + yi$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} M(z) \in E_3 &\Leftrightarrow |z + \overline{z}| = |z| \\ &\Leftrightarrow |2x| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x \text{ ou } y = -\sqrt{3}x \end{aligned}$$

Donc : E_3 est l'union de deux droites $(D_1): y = \sqrt{3}x$ et $(D_2): y = -\sqrt{3}x$.

• $E_4 = \{M(z) / (z - 2i)(\overline{z} + 2i) = 9\}$

Soit $z \in \mathbb{C}$; $M(z) \in E_3 \Leftrightarrow (z - 2i)(\overline{z} + 2i) = 9$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (z - 2i)\overline{(z - 2i)} = 9 \\ &\Leftrightarrow |z - 2i|^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow |z - 2i| = 3 \\ &\Leftrightarrow IM = 3 \text{ ; avec } I(2i) \\ &\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(I;3) \end{aligned}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : E_4 est le cercle de centre I et de rayon 3.

• $E_5 = \{M(z) / |z-2+i| \leq 2\}$

Soit $z \in \mathbb{C}$; $M(z) \in E_5 \Leftrightarrow |z-2+i| \leq 2$

$\Leftrightarrow \Omega M \leq 2$; avec $\Omega(2-i)$

Donc : E_5 est le disque de centre $\Omega(2-i)$ et de rayon 2. (Frontière comprise ; Disque fermé)

• $E_6 = \left\{M(z) / \frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R}\right\}$

Soit $z \in \mathbb{C}-\{i\}$; $M(z) \in E_6 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)} = -\frac{z+i}{z-i}$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i} = \frac{-z-i}{z-i}$ (*)

(*) $\Leftrightarrow (\overline{z}-i)(z-i) = (\overline{z}+i)(-z-i)$

$\Leftrightarrow \overline{z}z - i\overline{z} - iz - 1 = -\overline{z}z - i\overline{z} - iz + 1$

$\Leftrightarrow 2z\overline{z} = 2$

$\Leftrightarrow z\overline{z} = 1$

$\Leftrightarrow |z|^2 = 1$

$\Leftrightarrow |z| = 1$ et $z \neq i$

$\Leftrightarrow OM = 1$ et $M \neq A(i)$

$\Leftrightarrow M \in (\mathscr{C}(O;1) - \{A\})$

Donc : E_6 est le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $A(i)$.

• $E_7 = \left\{M(z) / \frac{z-2+i}{z+1-3i} \in \mathbb{R}\right\}$

Soit $z \in \mathbb{C}-\{-1+3i\}$; $M(z) \in E_7 \Leftrightarrow \frac{z-2+i}{z+1-3i} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-2+i}{z+1-3i}\right)} = \frac{z-2+i}{z+1-3i}$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{z}-2-i}{\overline{z}+1+3i} = \frac{z-2+i}{z+1-3i}$

$\Leftrightarrow (\overline{z}-2-i)(z+1-3i) = (\overline{z}+1+3i)(z-2+i)$

$\Leftrightarrow \overline{z}z + (1-3i)\overline{z} + (-2-i)z + (-2-i)(1-3i) = \overline{z}z + (-2+i)\overline{z} + (1+3i)z + (1+3i)(-2+i)$

$\Leftrightarrow (3-4i)\overline{z} + (-3-4i)z = -10i$

On pose : $z = x+yi$, avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $(x;y) \neq (-1;3)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$M(z) \in E_7 \iff (3-4i)(x-yi)+(-3-4i)(x+yi) = -10i$$
$$\iff (-8x-6y)i = -10i$$
$$\iff -8x-6y = -10$$
$$\iff 4x+3y-5=0$$

Donc : E_7 est la droite d'équation $4x+3y-5=0$ privée du point $A(-1+3i)$.

Exercice 14

Montrons que : $\frac{z-u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $\overline{z} \neq z$ et $u \in \mathbb{C}-\{1\}$ tel que $|u|=1$.

On pose : $A = \frac{z-u\overline{z}}{1-u}$

Méthode 1: $\overline{A} = \overline{\left(\frac{z-u\overline{z}}{1-u}\right)} = \frac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}}$

Rappel : $A \in \mathbb{R} \iff \overline{A} = A$

$$= \frac{u\overline{u}\,\overline{z}-\overline{u}z}{u\overline{u}-\overline{u}} \quad ; (\text{car } u\overline{u} = |u|^2 = 1)$$
$$= \frac{\overline{u}(u\overline{z}-z)}{\overline{u}(u-1)} = \frac{z-u\overline{z}}{1-u} = A$$

Donc : A est un réel.

Méthode 2:

- On a: $|u|=1 \iff u\overline{u}=1$
$$\iff u = \frac{1}{\overline{u}}$$
- Donc: $A = \frac{z-u\overline{z}}{1-u} = \frac{z-\frac{1}{\overline{u}}\overline{z}}{1-\frac{1}{\overline{u}}} = \frac{\overline{u}z-\overline{z}}{\overline{u}-1} = \overline{A}$

Donc A est un réel.

Exercice 15

Montrons que : $Z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est un réel.

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\times\overline{z_2}}$$
$$= \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\times\frac{1}{z_2}} \quad ; \left(\text{car } |z|=1 \iff \overline{z}=\frac{1}{z}\right)$$
$$= \frac{\frac{z_2+z_1}{z_1z_2}}{\frac{z_1z_2+1}{z_1z_2}} = \frac{z_2+z_1}{z_1z_2+1} = Z$$

Puisque $\overline{Z} = Z$, alors : Z est un réel.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 16

Montrons que : $\forall (z_1;z_2)\in\mathbb{C}^2 ; |z_1|^2+|z_2|^2=\frac{1}{2}(|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2)$

Soit $(z_1;z_2)\in\mathbb{C}^2$

- $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$
  $=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}$
  $=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}$

- $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$
  $=|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}$

Donc : $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

D'où : $|z_1|^2+|z_2|^2=\frac{1}{2}[|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2]$

Exercice 17

Soit $z\in\mathbb{C}$

Montrons que : $\frac{|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}}\leq|z|\leq|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$

On pose : $z=x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

On a :

- $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

- $\frac{|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}}=\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}$

- Montrons que : $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{x^2+y^2}$

Nous allons utiliser un raisonnement par équivalence successive :

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{x^2+y^2}\iff(|x|+|y|)^2\leq 2(x^2+y^2)$$
$$\iff x^2+2|x|\times|y|+y^2\leq 2(x^2+y^2)$$
$$\iff x^2+y^2-2|x|\times|y|\geq 0$$
$$\iff(|x|-|y|)^2\geq 0$$

Puisque la proposition $(|x|-|y|)^2\geq 0$ est vraie pour tous réels x et y,

alors la proposition $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{x^2+y^2}$ est aussi vraie.

Donc : $\frac{|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}}\leq|z|$

For more visit: L9ray.com CamScanner

* Montrons que : $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$ C'est-à-dire : $\sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y|$

$(\sqrt{x^2+y^2})^2 = x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 - 2|x| \times |y|$

or $-2|x| \times |y| \leq 0$, donc : $(\sqrt{x^2+y^2})^2 \leq (|x| + |y|)^2$

D'où : $\sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y|$

Donc : $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

Conclusion : $(\forall z \in \mathbb{C}); \dfrac{|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

Exercice 18

Soit $z \in \mathbb{C}$; montrons que : $|z| \leq 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(3 + 4z + z^2) \geq 0$

On pose : $z = x + yi$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

- $z^2 + 4z + 3 = (x + yi)^2 + 4(x + yi) + 3$
  $= (x^2 - y^2 + 4x + 3) + (2xy + 4y)i$

Donc : $\mathrm{Re}(3 + 4z + z^2) = x^2 - y^2 + 4x + 3$
$= 2x^2 - x^2 - y^2 + 4x + 2 + 1$
$= 2(x^2 + 2x + 1) + 1 - (x^2 + y^2)$
$= 2(x+1)^2 + 1 - (x^2 + y^2)$

- $|z| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$
  $\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$
  $\Rightarrow 1 - (x^2 + y^2) \geq 0$
  $\Rightarrow 2(x+1)^2 + 1 - (x^2 + y^2) \geq 0$
  $\Rightarrow \mathrm{Re}(3 + 4z + z^2) \geq 0$

Donc : $(\forall z \in \mathbb{C}); |z| \leq 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(3 + 4z + z^2) \geq 0$

V Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

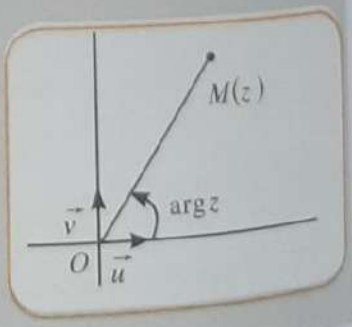
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

Définition:

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z.

On appelle argument de z et on note $\arg z$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

On écrit : $\arg z \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{OM})[2\pi]$



For more visit: L9ray.com CamScanner

Remarque : 0 est l'unique nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Soit z un nombre complexe et b un nombre réel. On a:

- $(z \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z}))$
- $(z \in \mathbb{R}^{+*}) \Leftrightarrow \arg(z) = 2k\pi \ ; (k \in \mathbb{Z})$
- $(z \in \mathbb{R}^{-*}) \Leftrightarrow \arg(z) = \pi + 2k\pi \ ; (k \in \mathbb{Z})$
- $(z \in i\,\mathbb{R}) \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z})$
- Si : $b > 0$, alors : $\arg(bi) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$
- Si : $b < 0$, alors : $\arg(bi) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$

- (Argument de $-z$) : $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$
- (Argument de $\overline{z}$) : $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Soit z un nombre complexe non nul tel que : $z = a + bi$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a;b) \neq (0;0)$ et $|z| = r \quad (r \in \mathbb{R}^{*+})$

On pose $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ on a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$

donc : $z = a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

L'écriture : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$ est appelée forme trigonométrique du nombre complexe non nul z.

Si z est un nombre complexe non nul tel que: $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls alors : $z = z' \Leftrightarrow (|z| = |z'| \text{ et } \arg z \equiv \arg z'[2\pi])$

Remarque :

$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$$

$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$$

$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Propriétés :

1. $\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$: (pour tous z et z' de $\mathbb{C}^*$)
2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z [2\pi]$: (pour tout z de $\mathbb{C}^*$)
3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$: (pour tous z et z' de $\mathbb{C}^*$)
4. $\arg(z^n) \equiv n \arg z [2\pi]$ pour tout n de $\mathbb{Z}$ et z de $\mathbb{C}^*$

Propriétés : Si : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $r > 0$ et $r' > 0$ alors : $z \times z' = rr'(\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha))$

et $\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

et $\frac{z'}{z} = \frac{r'(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{r'}{r}(\cos(\alpha-\theta) + i\sin(\alpha-\theta))$

et $z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

et $-z = -r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos((\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta))$

et $\overline{z} = r(\overline{\cos\theta + i\sin\theta}) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

Propriété :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ soit $A(z_A)$; $B(z_B)$; $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan.

On a : $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Alignement de trois points:

- A ; B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

(A ; B et C sont 2 à 2 distincts)

- parallélisme et orthogonalité de deux droites:

$(AB) // (CD) \iff \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$(AB) \perp (CD) \iff \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ (telque $A \neq B$ et $C \neq D$)

Remarque :

- L'écriture $z = [r;\theta]$ ne représente plus une forme trigonométrique!
- Toute forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul doit s'écrire forcément: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où r est un réel strictement positif (le module) et θ un réel (un argument).

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercices d'application

Dans tous les exercices suivants, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 19

Donner un argument de chacun des nombres suivants :

$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2=-\sqrt{7}$; $z_3=i$

$z_4=-\frac{1}{5}$; $z_5=i^{2019}$; $z_6=1+i$

$z_7=1-i$; $z_8=\sqrt{3}-i$; $z_9=-1-\sqrt{3}i$

$z_{10}=z_8\times z_9$; $z_{11}=\frac{z_7}{z_8}$; $z_{12}=z_7^{2020}$

Exercice 20

Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$a=1+3i$; $b=7-i$ et $c=5+9i$.

1) Montrer que : $\frac{c-a}{b-a}=i$

2) En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 21

Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=\sqrt{3}+i$; $z_2=-2\sqrt{3}i-2$; $z_3=(i-\sqrt{3})(1-\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i)$

$z_4=\frac{2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}+3)i}{2-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})i}$; $z_5=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}-\frac{1-2\sqrt{3}}{2}i\right)^{2020}$

Exercice 22

On considère le nombre complexe $z=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calculer z^2 puis $|z^2|$ et $\arg(z^2)$.

2) En déduire une forme trigonométrique de z.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$ puis celles de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) Construire les points A, B et C d'affixes respectives z; $-z$ et z^2.

Exercice 23

On pose : $\alpha=-\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1) Calculer α^2 puis en déduire $|\alpha|$ et $\arg(\alpha)$.

2) Déterminer chacun des ensembles suivants :

$E_1=\{M(z)/\ i\alpha z\in\mathbb{R}^+\}$; $E_2=\{M(z)/\ \alpha^2 z\in i\mathbb{R}\}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

L9RAY

Solutions

Exercice 19

- $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{R}^+$, donc : $\arg(z_1) \equiv 0[2\pi]$
- $z_2 = -\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7} \in \mathbb{R}^-$, donc : $\arg(z_2) \equiv \pi[2\pi]$
- $z_3 = i$ donc : z_3 est un imaginaire pur avec $\text{Im}(z_3) > 0$,

d'où : $\arg(z_3) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

- $z_4 = -\frac{i}{5}$ donc : z_4 est un imaginaire pur avec $\text{Im}(z_4) < 0$;

d'où : $\arg(z_4) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

- $z_5 = i^{2019}$

Méthode 1 :

$$\begin{aligned}\arg(z_5) &\equiv \arg(i^{2019})[2\pi] \\ &\equiv 2019\arg(i)[2\pi] \\ &\equiv 2019 \times \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$

Méthode 2: $z_5 = i^{2019} = i^{2018} \times i = (i^2)^{1009} \times i = -i$

Donc : $\arg(z_5) \equiv \arg(-i)[2\pi]$

$$\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

- $z_6 = 1 + i$ • $|z_6| = |1 + i| = \sqrt{2}$
- Soit θ un argument de z_6.

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\text{Re}(z_6)}{|z_6|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\text{Im}(z_6)}{|z_6|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Donc : $\arg(z_6) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

- $z_7 = 1 - i$

Méthode 1: $z_7 = \overline{z_6} \Rightarrow \arg(z_7) \equiv -\arg(z_6)[2\pi]$

$$\Rightarrow \arg(z_7) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Méthode 2:

• $|z_7| = |1 - i| = \sqrt{2}$

• $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\arg(z_7) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

• $z_8 = \sqrt{3} - i$

• $|z_8| = |\sqrt{3} - i| = 2$

• $z_8 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

Donc : $\arg(z_8) \equiv -\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

• $z_9 = -1 - \sqrt{3}i$

• $|z_9| = |-1 - \sqrt{3}i| = 2$

• $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$

Donc : $\arg(z_9) \equiv \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$

• $z_{10} = z_8 \times z_9 \Rightarrow \arg(z_{10}) \equiv \arg(z_8 \times z_9)[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{10}) \equiv \arg(z_8) + \arg(z_9)[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{10}) \equiv -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{10}) \equiv \dfrac{7\pi}{6}[2\pi]$

On peut écrire aussi : $\arg(z_{10}) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$

$z_{11} = \dfrac{z_7}{z_8} \Rightarrow \arg(z_{11}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_7}{z_8}\right)[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{11}) \equiv \arg(z_7) - \arg(z_8)[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{11}) \equiv -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{11}) \equiv -\dfrac{\pi}{12}[2\pi]$

• $z_{12} = z_7^{2020} \Rightarrow \arg(z_7) \equiv \arg(z_7^{2020})[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{12}) \equiv 2020\arg(z_7)[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{12}) \equiv 2020 \times \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{12}) \equiv -505\pi[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{12}) \equiv -\pi[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{12}) \equiv \pi[2\pi]$

For more visit: L9ray.com

CamScanner

Exercice 20

1) Montrons que : $\frac{c-a}{b-a} = i$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{(5+9i)-(1+3i)}{(7-i)-(1+3i)}$$
$$= \frac{4+6i}{6-4i}$$
$$= \frac{i(-4i+6)}{6-4i}$$
$$= i$$

2) Déduisons la nature du triangle ABC :

- $\frac{c-a}{b-a} = i \Rightarrow \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |i| = 1$
  $\Rightarrow |c-a| = |b-a|$
  $\Rightarrow AC = AB$
- $\frac{c-a}{b-a} = i \Rightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(i)\,[2\pi]$
  $\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$
  $\Rightarrow (AB) \perp (AC)$

Donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Exercice 21

Écrivons sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

- $z_1 = \sqrt{3} + i$

On a : $|z_1| = |\sqrt{3} + i| = 2$

Soit θ un argument de z_1.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z_1)}{|z_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{|z_1|} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$$

Donc : $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

- $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$

* $|z_2| = |-2(1+\sqrt{3}\,i)| = 2|1+\sqrt{3}\,i| = 2 \times 2 = 4$

For more visit: L9ray.com CamScanner

* $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

$= 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 4\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 4\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)$

Donc : $z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

• $z_3 = (i - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i)$

On pose : $z = i - \sqrt{3}$ et $z' = 1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i$

On a alors : $z_3 = z \times z'$

Donc : $\begin{cases} |z_3| = |z| \times |z'| \\ \arg(z_3) \equiv \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi] \end{cases}$

* $|z| = |i - \sqrt{3}| = 2$

$z = i - \sqrt{3} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Donc : $\arg(z) \equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$

* $|z'| = |1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i|$

$= |1 - \sqrt{3}| \times |1 - i| = (\sqrt{3} - 1) \times \sqrt{2}$

$z' = (\sqrt{3} - 1)(-1 + i)$

$= (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Donc : $|z_3| = 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

et: $\arg(z_3) \equiv \frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$

$\equiv -\frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où : $z_3 = 2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

• $z_4 = \dfrac{2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}+3)i}{2-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})i}$

On pose : $\begin{cases} X = 2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}+3i) \\ Y = 2-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})i \end{cases}$

On a alors : $z_4 = \dfrac{X}{Y}$

* $X = (2+\sqrt{3})+\sqrt{3}(2+\sqrt{3})i$
$= (2+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}i)$
$= (2+\sqrt{3})\times 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$= (4+2\sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $|X| = 4+2\sqrt{3}$ et $\arg(X) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

* $Y = (2-\sqrt{2})(1+i)$
$= (2-\sqrt{2})\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$
$= (2\sqrt{2}-2)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $|Y| = 2\sqrt{2}-2$ et $\arg(Y) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Or $z_4 = \frac{X}{Y}$, donc :

* $|z_4| = \left|\frac{X}{Y}\right| = \frac{|X|}{|Y|} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-2} = (2+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)$

* $\arg(z_4) \equiv \arg\left(\frac{X}{Y}\right)[2\pi]$
$\equiv \arg(X)-\arg(Y)[2\pi]$
$\equiv \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$
$\equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

D'où : $z_4 = (2+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

• $z_5 = \left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}-\frac{1-2\sqrt{3}}{2}i\right)^{2020}$

On pose : $Z = \frac{1}{2}-\sqrt{3}-\frac{1-2\sqrt{3}}{2}i$. On a alors : $z_5 = Z^{2020}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$* |Z| = \left|\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right| \times |1-i| = \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right) \times \sqrt{2}$

$Z = \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
$= \left(\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Donc : $\arg(Z) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

$* z_5 = Z^{2020} \Rightarrow \begin{cases} |z_5| = |Z|^{2020} = \left(\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^{2020} \\ \arg(z_5) \equiv 2020\arg(Z)\ [2\pi] \end{cases}$

$\arg(z_5) \equiv 2020 \times \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$
$\equiv 1515\pi\ [2\pi]$
$\equiv \pi\ [2\pi]$

Donc : $z_5 = \left(\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^{2020}(\cos\pi + i\sin\pi)$

Exercice 22

$z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calculons z^2 : $* z^2 = 2-\sqrt{3} - 2i\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - (2+\sqrt{3})$
$= -2\sqrt{3} - 2i$

$* |z^2| = |-2\sqrt{3}-2i| = \sqrt{16} = 4$

$* z^2 = -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

Donc : $\arg(z^2) \equiv \frac{7\pi}{6}\ [2\pi]$

2) Déduisons une forme trigonométrique de z :

$* |z^2| = |z|^2 = 4 \Rightarrow |z| = \sqrt{4} = 2$

$* \arg(z^2) \equiv \frac{7\pi}{6}\ [2\pi] \Rightarrow 2\arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6}\ [2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{12}\ [\pi]$

$\Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv -\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

or $\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = |z|\cos\theta \\ \mathrm{Re}(z) = \sqrt{2-\sqrt{3}} \end{cases}$; (où $\theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$)

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\cos\theta > 0$. Or $\cos\frac{7\pi}{12} < 0$ et $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) > 0$

Donc : $\theta = \frac{-5\pi}{12}$

Par conséquent : $z = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

3) Déduisons les valeurs exactes de : $\cos\frac{5\pi}{12}$; $\sin\frac{5\pi}{12}$; $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

On a : $\begin{cases} z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \end{cases}$

Donc :

$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Or $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12}$

et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$

Donc : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

4) Construisons les points A, B et C :

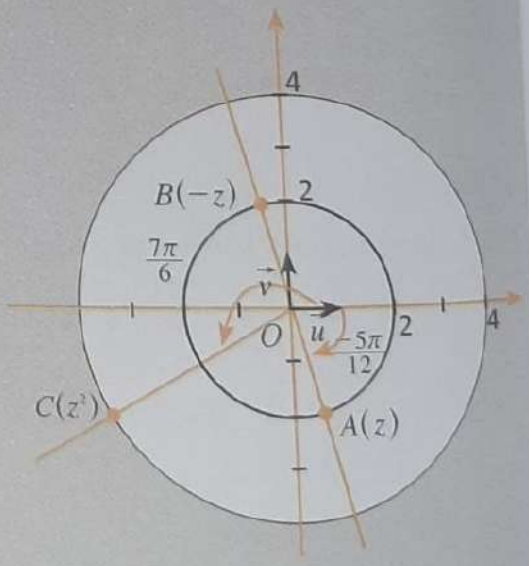
- $z_A = z \Rightarrow \begin{cases} OA = |z| = 2 \\ (\vec{u};\overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\,[2\pi] \end{cases}$

Donc le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2; de plus $(\vec{u};\overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\,[2\pi]$ on peut donc placer le point A avec précision (voir figure).

- $z_B = -z = -z_A$, donc B est le symétrique de A par rapport à O (origine du repère).

- $z_C = z^2 \Rightarrow \begin{cases} OC = |z^2| = 4 \\ (\vec{u};\overrightarrow{OC}) \equiv \pi + \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases}$

Donc : C appartient au cercle de centre O et de rayon 4, de plus $(\vec{u};\overrightarrow{OC}) \equiv \pi + \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$, on peut donc placer le point C avec précision. (voir figure)



For more visit: L9ray.com
CamScanner

Exercice 23

$\alpha = -\sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1) • Calculons α^2 :

$$\alpha^2 = 2+\sqrt{3}+2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}-2+\sqrt{3}$$
$$= 2\sqrt{3}+2i$$

• Calculons $|\alpha|$ et $\arg(\alpha)$:

* $|\alpha^2| = |2(\sqrt{3}+i)| = 2|\sqrt{3}+i| = 2\times 2 = 4$
$|\alpha^2| = 4 \Rightarrow |\alpha| = 2$

* $\alpha^2 = 2\sqrt{3}+2i$
$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$
$= 4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $\arg(\alpha^2) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\arg(\alpha^2) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \Rightarrow 2\arg(\alpha) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\Rightarrow \arg(\alpha) \equiv \frac{\pi}{12}[\pi]$

$\Rightarrow \arg(\alpha) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$ ou $\arg(\alpha) \equiv \pi+\frac{\pi}{12}[2\pi]$

Or: $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) < 0$, donc : $\arg(\alpha) \equiv \frac{13\pi}{12}[2\pi]$

2) Déterminons les ensembles E_1 et E_2 :

• $E_1 = \{M(z) / i\alpha z \in \mathbb{R}^+\}$

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$M(z) \in E_1 \Leftrightarrow i\alpha z \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow i\alpha z = 0$ ou $\arg(i\alpha z) \equiv 0[2\pi]$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(i)+\arg(\alpha)+\arg(z) \equiv 0[2\pi]$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}-\frac{13\pi}{12}[2\pi]$

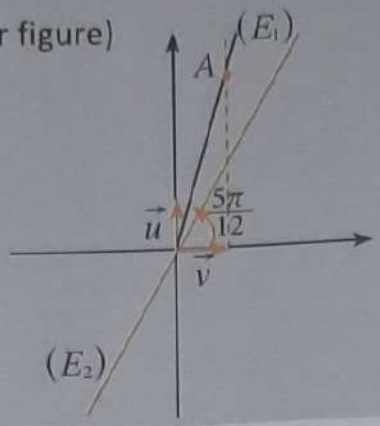
$\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

$\Leftrightarrow M = O$ ou $(\vec{u};\overrightarrow{OM}) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc E_1 est la demi-droite $[OA)$ où A est le point d'abscisse 1 tel que :

$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OA}) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$ (voir figure)



VI Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition:

Soit z un nombre complexe non nul;

Si : $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$ alors z s'écrit sous forme : $z = re^{i\theta}$; cette écriture est appelée **forme exponentielle** du nombre complexe z.

Et on a : $r(\cos\theta + i\ \sin\theta) = re^{i\theta}$.

1) Notation exponentielle et opérations

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ tels que $r > 0$ et $r' > 0$

On a : $z \times z' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ et $\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ et $-z = -re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$

2) Formules d'Euler

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

3) Formule de Moivre

$(\forall\theta \in \mathbb{R})\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ (\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\ \sin(n\theta)$

C'est-à-dire : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Exercices d'application

Exercice 24

Mettre sous forme exponentielle chacun des nombres suivants:

1) $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{5} - i\ \sin\frac{\pi}{5})$ 2) $z_2 = 3(-\cos\frac{\pi}{7} + i\ \sin\frac{\pi}{7})$

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) $z_3 = \sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{9} - i\ \sin\frac{\pi}{9})$

4) $z_4 = -\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{11} + i\ \sin\frac{\pi}{11})$

5) $z_5 = \frac{3}{2}i$

6) $z_6 = -7$

7) $z_7 = 2 + 2i$

8) $z_8 = -\sqrt{3} - 3i$

Exercice 25

Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe z dans chacun des cas suivants :

1) $z = \dfrac{-2}{\sqrt{3}+i}$

2) $z = \dfrac{2+2i}{\sqrt{3}+i}$

3) $z = (1-\sqrt{3}\,i)^{2016}$

4) $z = (3-\sqrt{3}\,i)(-1+i)$

5) $z = i(1+\sqrt{3}\,i)(-1-i)^3$

6) $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{(-2+2i)^2}$

Exercice 26

I- 1) Montrer que :

a) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,; 1 + e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$

b) Montrer que : $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2); e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2); e^{ia} - e^{ib} = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

II- On pose : $u = 1 + i\sqrt{3}$ et $v = \sqrt{2}(1+i)$

1) Écrire sous forme exponentielle les nombres u et v

2) On pose $t = (\sqrt{2}+1) + i(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Écrire t sous forme exponentielle.

III- Soit $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[$

On pose : $z = re^{i\theta}$

Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $Z = z - e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z}$

Exercice 27

1) Soit x un nombre réel tel que $0 < x < 2\pi$

Déterminer, suivant les valeurs de x, une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$Z_1 = 1 + \cos x + i\sin x$; $Z_2 = 1 - \cos x + i\sin x$; $Z_3 = 1 - \sin x + i\cos x$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Application

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

$z_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_3 = 2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

3) Soit θ un nombre réel tel que : $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe : $X = \frac{\tan\theta}{1 + i\tan\theta}$

Exercice 28

Soit α un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{4}[$.

On pose : $Z = \frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{\sqrt{1 + \sin(2\alpha)} + i\sqrt{1 - \sin(2\alpha)}}$

Déterminer $|Z|$ et $\arg|Z|$

Exercice 29

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

On pose : $u = e^{i\frac{\pi}{n}}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

1) Calculer $T = \sum_{k=0}^{n-1} u^k$

2) En déduire que : $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

Exercice 30

Linéariser chacune des expressions suivantes :

$f(x) = \sin^3(x)$; $g(x) = \cos^3(x) \times \sin^2(x)$

Solutions

Exercice 24

1) On a : $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{5} - i\ \sin\frac{\pi}{5})$

$= 2(\cos(\frac{-\pi}{5}) + i\sin(\frac{-\pi}{5})) = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$

donc : $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$

2) On a : $z_2 = 3(-\cos\frac{\pi}{7} + i\ \sin\frac{\pi}{7})$

$= 3(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$

$= 3(\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 3e^{i\frac{6\pi}{7}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

donc : $z_2 = 3e^{i\frac{6\pi}{7}}$

3) On a : $z_3 = \sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9})$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{9}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{10\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{9}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{10\pi}{9}}$

donc: $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{10\pi}{9}}$

4) On a : $z_4 = -\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{11} + i\sin\frac{\pi}{11})$

$= \sqrt{3}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)\right)$

$= \sqrt{3}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{11}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{11}\right)\right)$

$= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{12\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi}{11}\right)\right)$

$= \sqrt{3}e^{i\frac{12\pi}{11}}$

donc : $z_4 = \sqrt{3}e^{i\frac{12\pi}{11}}$

5) On a : $z_5 = \frac{3}{2}i = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

6) $z_6 = -7 = 7(\cos\pi + i\sin\pi) = 7e^{i\pi}$

donc : $z_6 = 7e^{i\pi}$

7) On a : $z_7 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}(\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i)$

$z_7 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z_7 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

donc : $z_7 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

8) On a : $z_8 = -\sqrt{3} - 3i$

Alors : $|z_8| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Donc : $z_8 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}}i\right)$

$= 2\sqrt{3}(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= 2\sqrt{3}(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3})$

$= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin(\frac{4\pi}{3})\right)$

D'où : $z_8 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 25

1) On a : : $z = \dfrac{-2}{\sqrt{3}+i}$ et $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{i\pi}$

Et : $\sqrt{3}+i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Alors: $z = \dfrac{2e^{i\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\pi-\frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Donc : $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2) On a : $z = \dfrac{2+2i}{\sqrt{3}+i}$ et $2+2i = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

et $\sqrt{3}+i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

donc : $z = \dfrac{2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{2}\,e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})}$ d'où: $z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

3) $z = (1-\sqrt{3}\,i)^{2016}$

On a : $|1-i\sqrt{3}| = 2$

Donc : $1-i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\cos(\dfrac{-\pi}{3})+i\sin(\dfrac{-\pi}{3})) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

D'où : $z = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{2016} = 2^{2016}\,e^{-i\frac{2016}{3}\pi} = 2^{2016}\,e^{-i(672\pi)}$

Ainsi: $z = 2^{2016}e^{io}$ ou $z = 2^{2016}\,e^{i2\pi}$

4) $z = (3-\sqrt{3}\,i)(-1+i)$

On a : $|3-i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Donc : $3-i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{3}}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(\cos(\dfrac{-\pi}{6})+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right)$

$= 2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Et on a : $|-1+i| = \sqrt{2}$

Donc : $-1+i = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos(\pi-\dfrac{\pi}{4})+i\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où : $z = (3-\sqrt{3}i)(-1+i) = 2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$
$= 2\sqrt{6}\,e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4})} = 2\sqrt{6}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$

5) $z = i(1+i\sqrt{3})(-1-i)^3$

On a : • $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

• $1+\sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

• $-1-i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Donc : $z = i(1+\sqrt{3}i)(-1-i)^3$
$= e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} \times (\sqrt{2})^3 e^{i\frac{15\pi}{4}}$
$= 4\sqrt{2}\,e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{15\pi}{4})}$
$= 4\sqrt{2}\,e^{i\frac{55\pi}{12}}$
$= 4\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$ (car $\left(\frac{55\pi}{12} - 4\pi = \frac{7\pi}{12}\right)$)

6) $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{(-2+2i)^2}$

On a : • $\sqrt{3}-i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}) = 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

• $(-2+2i)^2 = 4(1-i)^2 = -8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc : $z = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{8e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{4}e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 26

I- Soit α un réel ;

• $1+e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}} \times e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}} \times e^{i\frac{\alpha}{2}}$
$= e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}})$
$= e^{i\frac{\alpha}{2}} \times \left(2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

Donc : $1+e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$

• * $1-e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}} \times e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}} \times e^{i\frac{\alpha}{2}}$
$= e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}})$
$= e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$
$= 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\alpha}{2}}$
$= 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times e^{i(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2})}$

Rappel :
$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$
$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $1-e^{i\alpha}=\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\times e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$

2) Soit a et b deux nombres réels.

- $e^{ia}+e^{ib}=e^{ib}\left(e^{i(a-b)}+1\right)$

$=e^{ib}\times\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)$ (d'après la question 1)

$=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(b+\frac{a-b}{2}\right)}$

Donc : $e^{ia}+e^{ib}=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

- $e^{ia}-e^{ib}=e^{ia}+e^{i\pi}\times e^{ib}$; (car $-1=e^{i\pi}$)

$=e^{ia}+e^{i(\pi+b)}$

$=2\cos\left(\frac{a-(b+\pi)}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b+\pi}{2}\right)}$

Donc : $e^{ia}-e^{ib}=2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

II- 1) Écrivons u et v sous forme exponentielle

- $u=1+i\sqrt{3}$

$=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc $u=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

- $v=\sqrt{2}(1+i)$

$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $v=2e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) Écrivons t sous forme exponentielle

$t=(\sqrt{2}+1)+i(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$=\sqrt{2}+1+i\sqrt{2}+i\sqrt{3}$

$=(1+i\sqrt{3})+\sqrt{2}(1+i)$

$=u+v$

$=2e^{i\frac{\pi}{3}}+2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$=2(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{4}})$

$=4\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}}{2}\right)e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}}{2}\right)}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $t = 4\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{2\pi}{24}}$

III- Écrivons Z sous forme exponentielle

On a : $z = re^{i\theta}$ et $Z = z - e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z}$

Donc : $Z = re^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}} \times re^{-i\theta}$

$= r(e^{i\theta} - e^{i(\frac{\pi}{3}-\theta)})$

$= r\left(2\sin\left(\frac{\theta-(\frac{\pi}{3}-\theta)}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\frac{\pi}{3}-\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$

D'où : $Z = 2r.\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right).e^{i\frac{2\pi}{3}}$

• Vérifions si $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) > 0$

$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$

Donc : $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) > 0$; et comme $2r > 0$

Alors : $2r\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une écriture de Z sous forme exponentielle.

Exercice 27

1) Déterminons une forme trigonométrique de Z_1 ; Z_2 et Z_3

• $Z_1 = 1 + \cos x + i\sin x$; $0 < x < 2\pi$

$= 1 + e^{ix}$

$= e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}})$

$= e^{i\frac{x}{2}} \times 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

• Étudions le signe de $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$0 < x < 2\pi \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \pi$

• Si $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $0 < x < \pi$; alors $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$

Donc une forme trigonométrique de Z_1 est :

$Z_1 = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

• si $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $x = \pi$, alors $\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $z_1 = 0$

Dans le cas Z_1 n'admet pas de forme trigonométrqiue

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Si $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$ c'est-à-dore $\pi < x < 2\pi$, alors $\cos\left(\frac{x}{2}\right) < 0$, donc $|Z_1| = -2\cos\frac{x}{2}$

$$Z_1 = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(-\cos\left(\frac{x}{2}\right) - i\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$Z_1 = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right)$$

Cette dernière expression est une forme trigonométrique de Z_1

• $Z_2 = 1 - \cos x + i\sin x$

$$= 1 - (\cos x - i\sin x)$$

$$= 1 - e^{-ix}$$

$$= e^{-i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)$$

$$= e^{-i\frac{x}{2}} \times (2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{x}{2}}$$

$$= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \times e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}$$

or $0 < \frac{x}{2} < \pi$, donc $\sin\left(\frac{x}{2}\right) > 0$, d'où $|Z_2| = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

et par conséquent, $Z_2 = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right)$

Cette expression est une forme trigonométrique de Z_2.

• $Z_3 = 1 - \sin x + i\cos x$

$$= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$= 1 + e^{i\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)$$

$0 < \frac{x}{2} < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{4}$

• Si $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$; c'est-à-dire $0 < x < \frac{\pi}{2}$

alors $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) > 0$, donc $|Z_3| = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$, et par suite

$$Z_3 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)$$

Cette expression est une forme trigonométrique de Z_3.

• Si $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = 0$, donc $Z_3 = 0$; dans ce cas Z_3 n'admet pas de forme trigonométrique.

Si $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{4}$ c'est-à-dire : $\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$; alors $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) < 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

donc $|Z_3| = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

Donc : $Z_3 = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)$

$= -2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)\right)+i\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)$

Cette expression est une forme trigonométrique de Z_3.

2) Application : Écrivons chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

- $z_1 = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$= 1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right)\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$ (d'après 1) car $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$)

- $z_2 = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$= 1-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

(même forme que z_2 de la question 1) avec $x = \frac{\pi}{6}$ et $0 < \frac{x}{2} < \pi$)

Donc: $z_2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

- $z_3 = 2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

$= 2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(1+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 2\left[2\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)\right]$

$= 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) Écrivons X sous forme trigonométrique

$$X = \frac{\tan\theta}{1 + i\tan\theta} \text{ avec } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

- $1 + i\tan\theta = 1 + i\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$$

Donc $X = \dfrac{\tan\theta}{\frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}} = \sin\theta e^{-i\theta}$

- Si $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$; alors $\sin\theta < 0$, donc $|X| = -\sin\theta$

Donc $X = -\sin\theta(-\cos(-\theta) - i\sin(-\theta))$

$$= -\sin\theta(\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta))$$

Dans ce cas, $-\sin\theta(\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta))$ est une forme trigonométrique de X.

- Si $\theta = 0$, alors $\sin\theta = 0$, donc $X = 0$

dans ce cas X n'admet pas de forme trigonométrique.

- Si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, alors $\sin\theta > 0$, donc $|X| = \sin\theta$, d'où

$\sin\theta(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ est une forme trigonométrique de X.

Exercice 28

Calculons $|Z|$ et $\arg(Z)$ où $Z = \dfrac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + 4\sqrt{1 - \sin 2\alpha}}$

- $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha = 1 + e^{i\alpha}$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

- $\sqrt{1 + \sin 2\alpha} = \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}$

$$= \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$$

$$= \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right|$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• $\alpha \in]0;\frac{\pi}{4}[\Rightarrow \frac{-\pi}{4} < -\alpha < 0$

$\Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - \alpha < \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) > 0$

Donc : $\sqrt{1+\sin 2\alpha} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

De même : $\sqrt{1-\sin 2\alpha} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

Donc : $\sqrt{1+\sin 2\alpha} + i\sqrt{1-\sin 2\alpha} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right)$

$= \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$

D'où : $Z = \dfrac{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}}$

$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$

$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

• $\alpha \in]0;\frac{\pi}{4}[\Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{8}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$

Donc : $|Z| = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $\arg(Z) \equiv \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

Exercice 29

1) Calculons $T = \sum_{k=0}^{n-1} u^k$

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

On a : $T = 1 + u + u^2 + \ldots + u^{n-2} + u^{n-1}$

$uT = u + u^2 + u^3 + \ldots + u^{n-1} + u^n$

Donc : $T - uT = 1 - u^n$

or : $u \neq 1$, donc $T = \dfrac{1-u^n}{1-u}$

On a :

• $1 - u^n = 1 - (e^{i\frac{\pi}{n}})^n = 1 - e^{i\pi} = 2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• $1-u=1-e^{i\frac{\pi}{n}}$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{2}\right)}$ (voir l'exercice 26 - I)

Donc : $T=\dfrac{2}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{2}\right)}}$

D'où : $T=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)}$

2) Déduisons que $S_n=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

$u^k=e^{i\frac{k\pi}{n}}=\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Donc : $T=\sum_{k=1}^{n-1}u^k=\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+i\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

D'où : $S_n=\mathrm{Im}(T)$

or, d'après la question 1), $T=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)}$

Donc : $\mathrm{Im}(T)=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)$

Donc : $S_n=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\times\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

D'où : $S_n=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ $((\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\})$; car $\frac{\pi}{2n}\not\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi])$

Exercice 30

•Linéarisons $f(x)=\sin^3 x$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $\sin x=\dfrac{e^{x}-e^{-ix}}{2i}$

Donc : $\sin^3(x)=\dfrac{1}{8i^3}(e^{ix}-e^{-ix})^3$

$=\dfrac{i}{8}((e^{ix})^3-3(e^{ix})^2e^{-ix}+3e^{ix}(e^{-ix})^2-(e^{-ix})^3)$

$=\dfrac{i}{8}[e^{i3x}-e^{-i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$= \frac{i}{8}[2i\sin(3x) - 3 \times 2i\sin x]$$
$$= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x$$

D'où : $f(x) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$

- Linéarisons $g(x)$: $g(x) = \cos^5 x \times \sin^2 x$; $x \in \mathbb{R}$
- On a : $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Donc : $\sin^2(x) = \frac{1}{(2i)^2}(e^{i2x} - 2 + e^{-i2x})$

$$= -\frac{1}{4}(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2)$$

- $\cos^5(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5$

$$= \frac{1}{2^5}[e^{i5x} + 5e^{i4x} \times e^{-ix} + 10e^{i3x} \times e^{-i2x} + 10e^{i2x} \times e^{-i3x} + 5e^{ix} \times e^{-i4x} + e^{-i5x}]$$
$$= \frac{1}{2^5}[e^{i5x} + e^{-i5x} + 5(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 10(e^{ix} + e^{-ix})]$$

Donc :

$$\cos^5 x \times \sin^2 x = -\frac{1}{2^7}(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2)[e^{i5x} + e^{-i5x} + 5(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 10(e^{ix} + e^{-ix})]$$
$$= -\frac{1}{2^7}[e^{i7x} + e^{-i7x} + 5(e^{i5x} + e^{-i5x}) + 10(e^{i3x} + e^{-i3x}) + e^{i3x} + 5e^{ix} + 10e^{-ix} + e^{-i3x}$$
$$+ 5e^{-ix} + 10e^{ix} - 2(e^{i5x} + e^{-i5x}) - 10(e^{i3x} + e^{-i3x}) - 20(e^{ix} + e^{-ix})]$$
$$= -\frac{1}{2^7}[e^{i7x} + e^{-i7x} + 3(e^{i5x} + e^{-i5x}) + (e^{i3x} + e^{-i3x}) - 5(e^{ix} + e^{-ix})]$$
$$= -\frac{1}{2^7}[2\cos(7x) + 6\cos(5x) + 2\cos(3x) - 10\cos x]$$
$$= -\frac{1}{2^6}\cos(7x) - \frac{3}{2^6}\cos(5x) - \frac{1}{2^6}\cos(3x) + \frac{5}{2^6}\cos(x)$$

Donc : $g(x) = -\frac{1}{64}\cos(7x) - \frac{3}{64}\cos(5x) - \frac{1}{64}\cos(3x) + \frac{5}{64}\cos(x)$.

VII Racines nième d'un nombre complexe non nul - Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1) Racines nième d'un complexe non nul

Définition:

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$

On appelle racine $n^{ième}$ de z, tout nombre complexe X vérifiant : $X^n = z$

For more visit: L9ray.com CamScanner

- Cas particulier : Racines $n^{ième}$ de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$

- Tout nombre complexe vérifiant $z^n = 1$ est une racine $n^{ième}$ de l'unité (c'est-à-dire 1)
- L'ensemble des racines $n^{ième}$ l'unité est : $u_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \{0;1;\cdots;n-1\}\right\}$

$\forall k \in \{0;1;\cdots;(n-1)\}$; $u_k = (e^{\frac{2ik\pi}{n}})^k = u_1^k$ avec $u_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

- Les racines cubiques de l'unité sont : 1 ; j et $\overline{j}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Remarques :

- $\overline{j} = j^2$
- $j^3 = 1$
- $1 + j + j^2 = 0$
- Les points $A_1(1)$; $A_2(j)$ et $A_3(j^2)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon 1.
- Si z est un nombre complexe non nul de forme trigonométrique $re^{i\theta}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, alors les racines $n^{ième}$ de z sont les nombres complexes :

$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0;1;2;\cdots;n-1\}$

2) Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

a) Racines carrées d'un complexe non nul

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées (et elles sont opposées)
- Si $z = re^{i\theta}$; $(r > 0)$ alors les racines carrée de z sont :

$$z_1 = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } z_2 = -z_1 = -\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$$

- Si $z = a + bi$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors on cherche des réels x et y tels que : $(x+yi)^2 = a + bi$ pour déterminer les racines carrées de z.

b) Résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$

Pour résoudre l'équation : $az^2 + bz + c = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$ l'équation admet une racine double : $z = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$, soit δ une racine carrée de Δ : $\delta^2 = \Delta$

L'équation admet dans ce cas deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercices d'application

Exercice 31

1) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $a = 4(-1 + i\sqrt{3})$

2) Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $b = 8\sqrt{2}(1 + i)$

Exercice 32

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$ et écrire les solutions sous forme algébrique.

2) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 33

Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = -\frac{1}{2}$; $z_2 = \frac{\pi}{4}$; $z_3 = 2i$; $z_4 = -2i$

$z_5 = -5 - 12i$; $z_6 = 1 + 2\sqrt{2}\,i$; $z_7 = -1 - 4\sqrt{3}\,i$; $z_8 = \frac{73}{36} - \sqrt{2}\,i$

Exercice 34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$(E_1) : z^2 - 2z + 2 = 0$

$(E_2) : z^2 + (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$

$(E_3) : z^2(1 - z^2) = 16$

$(E_4) : z^2 - 2(1 + \cos\alpha)z + 2(1 + \cos\alpha) = 0$

$(E_5) : z + 3\overline{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$

Exercice 35

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E_1) : z^3 + (1 + 2i)z^2 + (-1 + 5i)z - 2i - 6 = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E_2) : z^3 + 2(1 + i)z^2 + (-6 + 5i)z - 9 - 3i = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E_3) : z^4 - 2(1 - i)z^3 - 4z^2 - 2(1 + 9i)z + 15 = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle et une solution imaginaire pure.

Exercice 36

1) Déterminer les racines 7ième de l'unité

2) On pose : $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$; $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$

For more visit: L9ray.com CamScanner

a) Montrer que les nombres complexes u et v sont conjugués

b) Montrer que $\mathrm{Im}(u) > 0$

c) Calculer $u+v$ et $u \times v$

d) En déduire la valeur de u et de v

e) En utilisant les questions précédentes, déterminer la valeur de chacune des sommes :

$$s = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=4}^{10} \sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$$

Solutions

Exercice 31

1) Déterminons les racines cubiques de $a = 4(-1+i\sqrt{3})$

• Écrivons a sous forme exponentielle

On a: $|a| = 4|-1+i\sqrt{3}| = 4 \times 2 = 8$, donc:

$$\begin{aligned} a &= 8\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 8\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 8\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 8e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

$a = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$, donc les racines cubiques de a sont les nombres :

$z_k = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k \in \{0;1;2\}$ (car $\sqrt[3]{8} = 2$)

c'est-à-dire : $z_0 = 2e^{i\frac{2\pi}{9}}$; $z_1 = 2e^{i\frac{8\pi}{9}}$ et $z_2 = 2e^{i\frac{14\pi}{9}} = 2e^{-i\frac{4\pi}{9}}$

2) Déterminons les racines quatrièmes de b

$$\begin{aligned} b &= 8\sqrt{2}(1+i) \\ &= 8\sqrt{2} \times \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 16\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 16e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Les racines 4ième de b sont les nombres $z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}\right)}$ avec $k \in \{0;1;2;3\}$

c'est-à-dire $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{16}}$; $z_1 = 2e^{i\frac{9\pi}{16}}$; $z_2 = 2e^{i\frac{17\pi}{16}}$ et $z_3 = 2e^{i\frac{25\pi}{16}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 32

1) Résolvons l'équation :

$(E) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$

Résoudre cette équation revient à déterminer les racines cubiques du nombre complexe $A = 4\sqrt{2}(-1+i)$

On a : $A = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Donc les racines cubiques de A sont les nombres complexes :

$z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k \in \{0;1;2\}$

Les solutions de cette équation sont donc :

$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $z_2 = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$

Écrivons ces solutions sous forme algébrique.

étant donné que $\frac{11\pi}{12}$ et $\frac{19\pi}{12}$ ne sont pas des valeurs remarquables dont on connaît le cos et le sin, nous allons procéder autrement :

Puisque $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ est une solution de (E), alors : $z_0^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$

Donc $(E) \iff z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$

$\iff z^3 = z_0^3$

$\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1$ (car $z_0 \neq 0$)

Donc $\frac{z}{z_0}$ est une racine cubique de l'unité. Or les racines cubiques de l'unité sont 1; j et $\overline{j}$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$; donc $\frac{z}{z_0} = 1$ ou $\frac{z}{z_0} = j$ ou $\frac{z}{z_0} = \overline{j}$

D'où : $z = z_0$ ou $z = jz_0$ ou $z = \overline{j} \times z_0$

Donc : $z = z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

ou $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$

$= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

ou $z = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$

$= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Déduisons les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

d'après la question 1) le nombre complexe $2e^{i\frac{11\pi}{12}}$ est une solution de l'équation (E)

$2e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ comme $\cos\frac{11\pi}{12} < 0$ et $\sin\frac{11\pi}{12} > 0$

alors cette solution correspond à $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Donc $\begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Exercice 33

Déterminons les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -\frac{1}{2}$

$z_1 \in \mathbb{R}^-$, donc les racines carrées de z_1 sont : $i\sqrt{-z_1}$ et $-i\sqrt{-z_1}$

c'est-à-dire : $i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

- $z_2 = \frac{\pi}{4}$

$z_2 \in \mathbb{R}^+$, donc les racines carrées de z_2 sont $\sqrt{z_2}$ et $-\sqrt{z_2}$ c'est-à-dire $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

- $z_3 = 2i$

Déterminons Z tel que : $Z^2 = z_3$

Méthode 1 :

On pose $Z = x + yi$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$$Z^2 = z_3 \iff (x+yi)^2 = 2i$$
$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 2i \\ |x+yi|^2 = |2i| \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 2 & (3) \end{cases}$$

En additionnant les équations (1) et (3), on obtient : $2x^2 = 2$

Donc : $x = 1$ ou $x = -1$

D'où : $y = 1$ ou $y = -1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Or x et y sont de même signe car $xy > 0$ d'après (3), donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

D'où : $Z = 1 + i$ ou $Z = -1 - i$

Donc les racines carrées $2i$ sont $1 + i$ et $-1 - i$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} z_3 &= 2i \\ &= 1 + 2i - 1 \\ &= 1 + 2i + i^2 \\ &= (1 + i)^2 = (-1 - i)^2 \end{aligned}$$

Donc $1 + i$ et $-1 - i$ sont les racines carrées de z_3

• $z_4 = -2i$

On peut utiliser la méthode 1 ou la méthode 2 et on peut aussi utiliser le résultat précédent :

$$\begin{aligned} 2i = (1 + i)^2 &\Longrightarrow -2i = -(1 + i)^2 \\ &\Longrightarrow -2i = i^2(1 + i)^2 \\ &\Longrightarrow -2i = (i - 1)^2 \end{aligned}$$

Donc $-1 + i$ et $1 - i$ sont les racines carrées de $-2i$

• $z_5 = -5 - 12i$

On peut utiliser la méthode 1 ou la méthode 2 pour faire apparaître une identité remarquable

$$\begin{aligned} z_5 &= -5 - 12i \\ &= -5 - 2 \times 2 \times 3i \\ &= -9 + 4 - 2 \times 2 \times 3i \\ &= (3i)^2 - 2 \times 2 \times 3i + 2^2 \\ &= (2 - 3i)^2 \end{aligned}$$

Donc $2 - 3i$ et $-2 + 3i$ sont les racines carrées de $-5 - 12i$

• $z_6 = 1 + 2\sqrt{2}\,i$

$$\begin{aligned} &= 2 - 1 + 2\sqrt{2}\,i \\ &= (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\,i + i^2 \\ &= (\sqrt{2} + i)^2 \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{2} + i$ et $-\sqrt{2} - i$ sont les racines carrées de $1 + 2\sqrt{2}\,i$

For more visit: L9ray.com CamScanner

- $z_7 = -1 - 4\sqrt{3}\,i$
$= -1 - 2 \times 2\sqrt{3}\,i$
$= 3 - 4 - 2 \times 2\sqrt{3}\,i$
$= (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3}\,i + (2i)^2$
$= (\sqrt{3} - 2i)^2$

Donc $\sqrt{3} - 2i$ et $-\sqrt{3} + 2i$ sont les racines carrées du nombre $-1 - 4\sqrt{3}\,i$

- $z_8 = \frac{73}{36} - \sqrt{2}\,i$

Déterminons Z tel que $Z^2 = z_8$

On pose $Z = x + yi$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$$Z^2 = z_8 \iff (x+yi)^2 = \frac{73}{36} - \sqrt{2}\,i$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{73}{36} & (1) \\ xy = -\frac{\sqrt{2}}{2} & (2) \\ x^2 + y^2 = \left|\frac{73}{36} - \sqrt{2}\,i\right| = \frac{89}{36} & (3) \end{cases}$$

En additionnant (1) et (3), on obtient : $2x^2 = \frac{9}{2}$

Donc : $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$

De $(3) - (1)$ on obtient : $2y^2 = \frac{4}{9}$

Donc $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ou $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

Or x et y sont de signes contraires d'après (2), donc :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

D'où : $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$ et $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$ sont les racines carrées du nombre complexe z_8

Exercice 34

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $(E_1) : z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 4 - 8 = -4 = (2i)^2$. On peut choisir $\delta = 2i$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a} = \dfrac{2-2i}{2} = 1-i$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a} = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$

Donc $S = \{1-i; 1+i\}$

• $(E_2) : z^2 + (3+4i)z - 1 + 5i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (3+4i)^2 - 4(-1+5i)$

$= 9 + 24i - 16 + 4 - 20i$

$= -3 + 4i$

$= -4 + 1 + 2 \times 2i$

$= (2i)^2 + 1 + 2 \times 2i$

$= (1+2i)^2 = \delta^2$

avec $\delta = 1 + 2i$

Donc les solutions de l'équation (E_2) sont :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-3-4i-1-2i}{2} = -2-3i$$

$$z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = -1-i$$

Donc $S = \{-2-3i; -1-i\}$

• $(E_3) : z^2(1-z^2) = 16$

$(E_3) \Leftrightarrow z^2 - z^4 - 16 = 0$

On pose $z^2 = Z$

L'équation (E_3) devient : $Z^2 - Z + 16 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \times 16 = -63$

Donc : $Z_1 = \dfrac{1-i\sqrt{63}}{2}$ et $Z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{63}}{2}$

D'où : $z^2 = \dfrac{1-i\sqrt{63}}{2}$ ou $z^2 = \dfrac{1+i\sqrt{63}}{2}$

Déterminons les racines carrées de chacun des nombres complexes :

$$\frac{1-i\sqrt{63}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1+i\sqrt{63}}{2}$$

• Déterminons u tel que $u^2 = \dfrac{1-i\sqrt{63}}{2}$

On pose : $u = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$u^2=\frac{1-i\sqrt{63}}{2} \iff x^2-y^2+2ixy=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{63}}{2}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-y^2=\frac{1}{2} & (1)\\ xy=-\frac{\sqrt{63}}{4} & (2)\\ x^2+y^2=4 & (3)\end{cases}$$

- $(1)+(3) \Longrightarrow 2x^2=\frac{9}{2}$

$\Longrightarrow x=\frac{3}{2}$ ou $x=-\frac{3}{2}$

- $(3)-(1) \Longrightarrow 2y^2=\frac{7}{2}$

$\Longrightarrow y=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ou $y=-\frac{\sqrt{7}}{2}$

Or $xy<0$ (d'après (2)), donc : $\begin{cases} x=\frac{3}{2}\\ y=-\frac{\sqrt{7}}{2}\end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-\frac{3}{2}\\ y=\frac{\sqrt{7}}{2}\end{cases}$

D'où : $u=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$ ou $u=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$

Donc $z^2=\frac{1-\sqrt{63}}{2} \iff \begin{cases} z=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\\ ou\\ z=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\end{cases}$

- $z^2=Z_2=\overline{Z_1} \iff \begin{cases} z=\left(\overline{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i}\right)\\ ou\\ z=\left(\overline{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i}\right)\end{cases}$

$$\iff \begin{cases} z=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\\ ou\\ z=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\end{cases}$$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E_3)

est : $S=\left\{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i;-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i;\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i;-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right\}$

- (E_4) : $z^2-2(1+\cos\alpha)z+2(1+\cos\alpha)=0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$\Delta = (-2(1+\cos\alpha))^2 - 4\times 2(1+\cos\alpha)$$
$$= 4[1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha-2-2\cos\alpha]$$
$$= 4(\cos^2\alpha-1)$$
$$= -4\sin^2\alpha$$
$$= (2i\sin\alpha)^2$$

Donc : $z_1 = \dfrac{2(1+\cos\alpha)+2i\sin\alpha}{2} = 1+\cos\alpha+i\sin\alpha$

et $z_2 = \dfrac{2(1+\cos\alpha)-2i\sin\alpha}{2} = 1+\cos\alpha-i\sin\alpha$

Donc : $S = \{1+\cos\alpha+i\sin\alpha ; 1+\cos\alpha-i\sin\alpha\}$

• $(E_5) : z+3\overline{z} = (2+i\sqrt{3})|z|$

On remarque que cette équation contient z ; $\overline{z}$ et $|z|$ ce qui nous incite à poser $z = x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$(E_5) \Leftrightarrow (x+yi)+3(x-yi) = (2+i\sqrt{3})\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow 4x-2iy = 2\sqrt{x^2+y^2}+i\sqrt{3(x^2+y^2)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2\sqrt{x^2+y^2} \\ -2y = \sqrt{3}\times\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{x^2+y^2} \\ 2y = -\sqrt{3}\times 2x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ 2x = \sqrt{x^2+3x^2} = 2|x| \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Donc : $z = x-\sqrt{3}xi$ avec $x\geqslant 0$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_5) est : $S = \{z\in\mathbb{C}/z = (1-\sqrt{3}i)x \ ; \ x\in\mathbb{R}^+\}$

Exercice 35

Dans cet exercice, nous allons utiliser la propriété suivante :

Soit $P(z)$ un polynôme dans $\mathbb{C}$ de degré n : $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ avec $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ des nombres complexes et $a_n \neq 0$

• Si α est une racine de $P(z)$ c'est-à-dire: $P(\alpha) = 0$, alors il existe un unique polynôme $Q(z)$ de degré $n-1$ tel que : $(\forall z\in\mathbb{C})$; $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$

1) Résolvons l'équation (E_1) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit z_0 la solution imaginaire pure de (E_1), donc: $\exists y \in \mathbb{R} / z_0 = yi$

(z_0 solution de (E_1)) $\Leftrightarrow z_0^3 + (1+2i)z_0^2 + (-1+5i)z_0 - 2i - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -y^3 i - (1+2i)y^2 + (-1+5i)yi - 2i - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (-y^2 - 5y - 6) + i(-y^3 - 2y^2 - y - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 5y + 6 = 0 & (1) \\ y^3 + 2y^2 + y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Il est plus simple de résoudre l'équation (1) : c'est une équation du second degré qui admet pour solution -2 et -3

Parmi les nombres -2 et -3, seul -2 vérifie aussi l'équation (2)

Donc -2 est l'unique solution du système précédent et par suite $z_0 = -2i$ est l'unique solution imaginaire pure de l'équation (E_1)

On pose : $P(z) = z^3 + (1+2i)z^2 + (-1+5i)z - 2i - 6$

On a: $P(-2i) = 0$, donc $\exists (b,c) \in \mathbb{C}^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+2i)(z^2 + bz + c)$

Calculons b et c

On a :

- $(z+2i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b+2i)z^2 + (c+2ib)z + 2ic$

Donc; par identification,

$$P(z) = (z+2i)(z^2+bz+c) \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2i = 1 + 2i \\ c + 2ib = -1 + 5i \\ 2ic = -6 - 2i \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (b = 1$ et $c = -1 + 3i)$

Donc : $\forall z \in \mathbb{C}$; $P(z) = (z+2i)(z^2 + z - 1 + 3i)$

- $(E_1) \Leftrightarrow P(z) = 0$

$\Leftrightarrow z + 2i = 0$ ou $z^2 + z - 1 + 3i = 0$

$\Leftrightarrow z = -2i$ ou $z^2 + z - 1 + 3i = 0$

- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z - 1 + 3i = 0$

Le discriminant de cette équation est :

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - 4(-1+3i) = 5 - 12i \\ &= 9 - 4 - 2 \times 3 \times 2i \\ &= 3^2 + (2i)^2 - 2 \times 3 \times 2i \\ &= (3 - 2i)^2 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont $z_1 = \dfrac{-1-3+2i}{2} = -2 + i$

et $z_2 = \dfrac{-1+3-2i}{2} = 1 - i$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $S = \{2i; -2+i; 1-i\}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) sachant qu'elle admet une solution réelle a

Déterminons a

(a solution de E_2) $\Longleftrightarrow a^3+2(1+i)a^2+(-6+5i)a-9-3i=0$

$\Longleftrightarrow (a^3+2a^2-6a-9)+(2a^2+5a-3)i=0$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} a^3+2a^2-6a-9=0 & (1) \\ 2a^2+5a-3=0 & (2) \end{cases}$

Les solutions de l'équation (2) sont -3 et $\frac{1}{2}$; parmi ces deux valeurs, seule -3 vérifie aussi l'équation (1) donc -3 est l'unique solution de ce système et par suite $z_0=-3$ est la solution réelle de l'équation (E_2).

Déterminons les deux autres solutions

On pose : $P(z)=z^3+2(1+i)z^2+(-6+5i)z-9-3i$

$P(-3)=0 \Longrightarrow (\exists(b;c)\in\mathbb{C}^2)/(\forall z\in\mathbb{C});\ P(z)=(z+3)(z^2+bz+c)$

Or : $(z+3)(z^2+bz+c)=z^3+(3+b)z^2+(3b+c)z+3c$

Donc par identification : $\begin{cases} 3+b=2(1+i) \\ 3b+c=-6+5i \\ 3c=-9-3i \end{cases}$

D'où : $b=-1+2i$ et $c=-3-i$

Donc $P(z)=(z+3)(z^2+(-1+2i)z-3-i)$

$(E_2) \Longleftrightarrow P(z)=0$

$\Longleftrightarrow z=-3$ ou $z^2+(-1+2i)z-3-i=0$

Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta=(-1+2i)^2+12+4i=9$

Ses solutions sont : $z_1=\frac{1-2i-3}{2}=-1-i$ et $z_2=\frac{1-2i+3}{2}=2-i$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est :

$$S=\{-3;-1-i;2-i\}$$

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_3) sachant qu'elle admet une solution réelle et une solution imaginaire pure

(E_3) : $z^4-2(1-i)z^3-4z^2-2(1+9i)z+15=0$

On pose : $P(z)=z^4-2(1-i)z^3-4z^2-2(1+9i)z+15$

On a : $(E_3) \Longleftrightarrow P(z)=0$

• Soit z_0 un imaginaire pur, donc il existe un réel y tel que: $z_0=yi$

(z_0 solution de (E_3)) $\Longleftrightarrow P(z_0)=0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$\Leftrightarrow (yi)^4 - 2(1-i)(yi)^3 - 4(yi)^2 - 2(1+9i)yi + 15 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 18y + 15) + (2y^3 - 2y)i = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 18y + 15 = 0 & (1) \\ 2y^3 - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (2) sont 0 ; 1 et -1 ; parmi ces nombres, seul -1 vérifie aussi l'équation (1)

Donc $z_0 = -i$ est la seule solution imaginaire pure de l'équation (E_3)

• Soit z_1 une solution réelle de (E_3)

On pose $z_1 = x$ avec $x \in \mathbb{R}$

(z_1 solution de (E_3)) $\Leftrightarrow P(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2(1-i)x^3 - 4x^2 - 2(1+9i)x + 15 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 15) + i(2x^3 - 18x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 15 = 0 & (1) \\ 2x^3 - 18x = 0 & (2) \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (2) sont : 0 ; 3 et -3 ; parmi ces valeurs, seule 3 vérifie aussi l'équation (1)

Donc : $z_1 = 3$ est la seule solution réelle de l'équation (E_3)

• On a : $P(3) = 0$ et $P(-i) = 0$, donc il existe un polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que :

$\forall z \in \mathbb{C}$; $P(z) = (z-3)(z+i)Q(z)$ avec $Q(z) = z^2 + bz + c$; $(b,c) \in \mathbb{C}^2$

Or :

$$(z-3)(z+i)(z^2+bz+c) = (z^2 + (i-3)z - 3i)(z^2 + bz + c)$$
$$= z^4 + (b-3+i)z^3 + (c + bi - 3b - 3i)z^2 + (ic - 3c - 3ib)z - 3ic$$

Donc, par identification,

$$\begin{cases} b - 3 + i = -2(1-i) \\ c - 3b + (b-3)i = -4 \\ -3c + (c-3b)i = -2(1+9i) \\ -3ic = 15 \end{cases}$$

On obtient : $b = 1 + i$ et $c = 5i$

Donc $P(z) = (z-3)(z+i)(z^2 + (1+i)z + 5i)$

• $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 3 = 0$ ou $z = -i$ ou $z^2 + (1+i)z + 5i = 0)$

Résolvons l'équation : $z^2 + (1+i)z + 5i = 0$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$\Delta = (1+i)^2 - 20i = -18i$

$\Delta = -18i = -2i \times 9 = (1-i)^2 \times 3^2$

Les solutions de cette équation sont : $\begin{cases} z_3 = \dfrac{-1-i+3-3i}{2} = 1-2i \\ z_4 = \dfrac{-1-i-3+3i}{2} = -2+i \end{cases}$

Donc l'ensemble des solution de l'équation (E_3) est : $S = \{3; -i; 1-2i; -2+i\}$

Exercice 36

1) Déterminons les racines 7ième de 1

Les racines 7ième de l'unité sont les nombres complexes $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{7}}$ avec $k \in \{0; 1; 2; \cdots; 6\}$

2) a) Montrons que $\overline{v} = u$

Méthode 1 :

On a: $u = z + z^2 + z^4 = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$

et : $v = z^3 + z^5 + z^6$

$= e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{i\frac{10\pi}{7}} + e^{i\frac{12\pi}{7}}$

Donc : $\overline{v} = e^{-i\frac{6\pi}{7}} + e^{-i\frac{10\pi}{7}} + e^{-i\frac{12\pi}{7}}$

Or : $\frac{-6\pi}{7} \equiv \frac{8\pi}{7}[2\pi]$; $-\frac{10\pi}{7} \equiv \frac{4\pi}{7}[2\pi]$

et $-\frac{12\pi}{7} \equiv \frac{2\pi}{7}[2\pi]$

Donc : $\overline{v} = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{2\pi}{7}} = u$

$\overline{v} = u$; donc u et v sont conjugués

Méthode 2 :

$v = z^3 + z^5 + z^6 \Longrightarrow \overline{v} = \overline{z}^3 + \overline{z}^5 + \overline{z}^6$

$\Longrightarrow \overline{v} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6}$; (car $|z| = 1$)

$\Longrightarrow \overline{v} = \frac{z^7}{z^3} + \frac{z^7}{z^5} + \frac{z^7}{z^6}$; (car $z^7 = 1$)

$\Longrightarrow \overline{v} = z^4 + z^2 + z$

$\Longrightarrow \overline{v} = u$

Donc u et v sont conjugués :

b) Montrons que $\mathrm{Im}(u) > 0$

On a : $u = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\mathrm{Im}(u) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

$= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

Puisque la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $0 \leqslant \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors : $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) < \sin\frac{2\pi}{7}$

Donc : $\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$ et comme $\sin\frac{4\pi}{7} > 0$; (car $0 < \frac{4\pi}{7} < \pi$)

alors : $\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$

Donc : $\mathrm{Im}(u) > 0$

c) Calculons $u + v$ et $u \times v$

- $u + v = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$

Donc : $z \times (u + v) = z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$

D'où : $(u + v) - z(u + v) = z - z^7$

Donc : $u + v = \frac{z - z^7}{1 - z}$; (car $z \neq 1$)

$= \frac{z - 1}{1 - z}$; (car $z^7 = 1$)

$= -1$

Donc : $u + v = -1$

- $u \times v = (z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6)$

$= z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10}$

$= z^4(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) + 2z^7$

$= z^4\left(\frac{1 - z^7}{1 - z}\right) + 2z^7$

Or : $z^7 = 1$, donc : $u \times v = 2$

d) Déduisons u et v

On a : $\begin{cases} u + v = -1 \\ u \times v = 2 \end{cases}$

Donc : u et v sont les solutions de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$

c'est-à-dire : $X^2 + X + 2 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2$

donc ses solutions sont $\frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Or $\mathrm{Im}(u) > 0$, donc : $u = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $v = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

e) Déduisons les sommes s et S

- $s = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}$

On a : $u = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$

Donc : $s = R_e(u)$

On a : $u + v = u + \overline{u} = 2R_e(u)$

Donc : $s = \frac{1}{2}(u+v) = -\frac{1}{2}$

- $S = \sum_{k=4}^{10} \sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$

$= \sum_{k=4}^{10} \mathrm{Im}(z^k)$

$= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=4}^{10} z^k\right)$

On a : $u \times v = z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 + z^{10} + 2z^7$

Donc : $2 = \sum_{k=4}^{10} z^k + 2$; (car $z^7 = 1$ et $u \times v = 2$)

D'où : $\sum_{k=4}^{10} z^k = 0$

Par conséquent $\mathrm{Im}\left(\sum_{k=4}^{10} z^k\right) = 0$

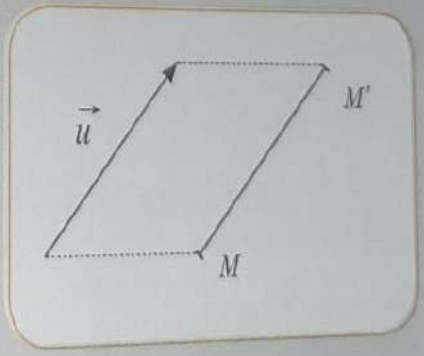
Donc : $S = 0$

VIII Écriture complexe des transformations usuelles

1) Translation

Soit t la translation de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$. Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe.

$$t(M(z)) = M'(z') \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$
$$\iff z' - z = z_{\vec{u}}$$
$$\iff z' = z + z_{\vec{u}}$$



L'écriture $z' = z + z_{\vec{u}}$ est appelée l'écriture (ou expression) complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$; avec $M(z)$; $M'(z')$ et $t(M) = M'$

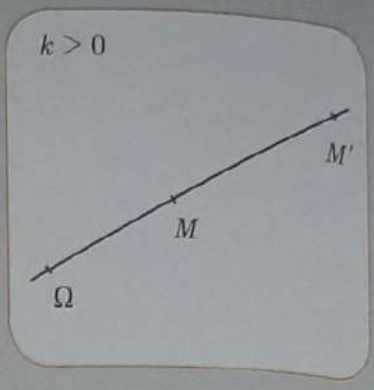
For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Homothétie

Soit h l'homothétie de centre le point $\Omega(\omega)$ et de rapport k (tel que k un réel non nul)

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ on a :

$$h_{(\Omega;k)}(M(z)) = M'(z') \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$$
$$\iff z' - \omega = k(z - \omega)$$
$$\iff z' = kz + \omega(1 - k)$$



$z' = kz + \omega(1 - k)$ est appelée l'écriture (ou expression) complexe de l'homothétie $h_{(\Omega;k)}$.

cas particulier : (le centre de l'homothétie est l'origine du repère).

L'écriture de l'homothétie de centre O (l'origine du repère) et de rapport k est : $z' = kz$

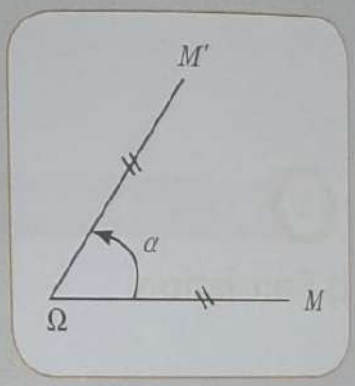
Remarque : Le centre Ω d'une homothétie est l'unique point fixe ou invariant (c'est-à-dire $h(\Omega) = \Omega$ pour $k \neq 1$ (où k est le rapport de h)).

3) Rotation

Soit r la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α on a : $r(\Omega) = \Omega$.

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ tels que $M \neq \Omega$, on a :

$$r_{(\Omega;\alpha)}(M(z)) = M'(z') \iff \begin{cases} M\Omega = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} |z - \omega| = |z' - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$$
$$\iff \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}$$
$$\iff z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$$
$$\iff z' = e^{i\alpha}z + \omega(1 - e^{i\alpha})$$



Cette dernière écriture est valable pour $M = \Omega$

$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ ou $z' = e^{i\alpha}z + \omega(1 - e^{i\alpha})$ est appelée l'écriture (ou expression) complexe de la rotation r de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α

où: $r(M(z)) = M'(z')$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Cas particulier: (le centre de la rotation est l'origine du repère).

L'écriture complexe de la rotation r de centre O l'origine du repère, et d'angle α est : $z' = e^{i\alpha} z$

Remarque : Le centre Ω d'une rotation r est l'unique point invariant (c'est-à-dire $r(\Omega) = \Omega$) (dans le cas $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$ où α est l'angle de la rotation).

Exercices d'application

Exercice 37

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

1) Déterminer dans chacun des cas suivants:

La nature de la transformation f qui transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' tel que :

a) $z' = z - 1 + 3i$

b) $z' = \frac{5}{2}z + 6i - 3$

c) $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 1 - \sqrt{3}i$

d) $z' = -z$

e) $z' = \overline{z}$

f) $z' = -\overline{z}$

2) Soit S la transformation qui, à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que :

$$z' = i\overline{z} - 1 + i$$

a) Montrer que l'ensemble des points invariants par la transformation S est une droite (D) dont on déterminera une équation.

b) Montrer que : ((D) est la médiatrice de $[MM']$) $\Longleftrightarrow S(M) = M'$

en déduire la nature de la transformation S.

Exercice 38

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère l'application F qui à tout $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = u^2 z + u - 1$ où u est un nombre complexe.

1) Déterminer l'ensemble E_1 des valeurs de u pour lesquelles F est une translation.

2) Déterminer l'ensemble E_2 des valeurs de u pour lesquelles F est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) Déterminer l'ensemble E_3 des valeurs de u pour lesquelles F est une homothétie de rapport -2

4) On pose : $u = 1 - i$

Montrer que F est la composé d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et une homothétie que l'on déterminera.

Solutions

Exercice 37

1) Déterminons la nature de chacune des transformations suivantes :

a) $f : M(z) \longmapsto M'(z') / z' = z - 1 + 3i$

Soit $M(z)$ un point du plan

$$f(M(z)) = M'(z') \Longleftrightarrow z' = z - 1 + 3i$$
$$\Longleftrightarrow z' - z = -1 + 3i$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{w} \text{ avec } \vec{w}(-1 + 3i)$$

Donc f est la translation de vecteur $\vec{w}(-1 + 3i)$

b) $f : M(z) \longmapsto M'(z') / z' = \frac{5}{2}z + 6i - 3$

Soit $M(z)$ un point du plan

- $f(M(z)) = M'(z') \Longleftrightarrow z' = \frac{5}{2}z + 6i - 3$

Info :
si $z' = az + b$ et $z_\Omega = az_\Omega + b$
alors $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$

Puisque z' est de la forme $az + b$ avec $a = \frac{5}{2} \in \mathbb{R}$, alors f est une homothétie de rapport $k = \frac{5}{2}$

- Déterminons le centre Ω de cette homothétie

$(\Omega(z)$ centre de $f) \Longleftrightarrow f(\Omega) = \Omega$
$$\Longleftrightarrow z = \frac{5}{2}z + 6i - 3$$
$$\Longleftrightarrow z = 2 - 4i$$

Donc $\Omega(2 - 4i)$ est le centre de l'homothétie f.

On peut vérifier que: $f(M(z)) = M'(z') \Longleftrightarrow z' - z_\Omega = \frac{5}{2}(z - z_\Omega)$

c) $f : M(z) \longmapsto M'(z') / z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 1 - \sqrt{3}i$

z' est de la forme $az + b$ avec $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; puisque $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$, alors f est une rotation d'angle $\arg(a)$ c'est-à-dire d'angle $\frac{\pi}{3}$

- Déterminons le point fixe de f

For more visit: L9ray.com CamScanner

$f(M) = M \iff z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 1 - \sqrt{3}\,i$

$\iff \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z = 1 - \sqrt{3}\,i$

$\iff z = 2$

$f(M(z)) = M'(z') \iff z' - 2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-2)$

Donc f est la rotation de centre $\Omega(2)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

d) $f : M(z) \longmapsto M'(z') / z' = -z$

• Puisque les points $M(z)$ et $M'(-z)$ sont symétriques par rapport à O (origine du repère), alors f est la symétrie centrale de centre O : $f = S_O$

• Remarques :

• z' est de la forme $az + b$ avec $a = -1 \in \mathbb{R}$ et $b = 0$

donc f est l'homothétie de centre O et de rapport -1

• $z' = e^{i\pi}z$, donc f est la rotation de centre O et d'angle π

Donc cette transformation f peut être considérée:

- une symétrie centrale de centre O
- une homothétie de centre O et de rapport -1
- une rotation de centre O et d'angle π

e) $f : M(z) \longmapsto M'(z') / z' = \overline{z}$

Puisque les points $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, alors la transformation f est la symétrie d'axe l'axe des abscisses : $f = S_{(ox)}$

f) $f : M(z) \longmapsto M'(z') / z' = -\overline{z}$

Puisque les points $M(z)$ et $M'(-\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, alors la transformation f est la symétrie d'axe (oy) (l'axe des ordonnées) : $f = S_{(oy)}$

2) $S : M(z) \longmapsto M'(z') / z' = i\,\overline{z} - 1 + i$

a) Montrons que l'ensemble des points invariants (ou fixes) par S est une droite

Soit $M(z)$; on pose $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

(M est invariant par S) $\iff S(M) = M$

$\iff z = i\,\overline{z} - 1 + i$

$\iff x + yi = i(x - yi) - 1 + i$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$\Leftrightarrow (x-y+1)+i(y-x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ y-x-1=0 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation : $y=x+1$

b) Montrons que : $(S(M)=M') \Leftrightarrow ((D)$ est la médiatrice de $[MM'])$

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan. On pose : $z=x+yi$ et $z'=x'+y'i$ avec $(x;x';y;y') \in \mathbb{R}^4$

Soit $\vec{w}(1;1)$ un vecteur directeur de la droite (D) : $y=x+1$

Soit I le milieu de $[MM']$; alors $I\left(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2}\right)$

$$((D) \text{ est la médiatrice de } [MM']) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{w}=0 \\ I \in (D) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-x')+(y-y')=0 \\ \frac{y+y'}{2}=\frac{x+x'}{2}+1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'=x+y \\ x'-y'=-x+y-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=y-1 \\ y'=x+1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x'+iy'=y-1+i(x+1)$$
$$\Leftrightarrow x'+iy'=i(x-yi)-1+i$$
$$\Leftrightarrow z'=i\,\overline{z}-1+i$$
$$\Leftrightarrow M'=S(M)$$

Donc : $(S(M)=M') \Leftrightarrow ((D)$ est la médiatrice de $[MM'])$

- Déduisons la nature de la transformation S

Puisque :

$\begin{cases} \bullet \text{ L'ensemble des points invariants par } S \text{ est la droite } (D) \\ \bullet\ (S(M)=M') \Leftrightarrow ((D) \text{ est la médiatrice de } [MM']) \end{cases}$

Alors la transformation S est la symétrie d'axe la droite (D).

Solutions

Exercice 38

1) Déterminons les valeurs de u pour lesquelles F est une translation

For more visit: L9ray.com CamScanner

$F : M(z) \longmapsto M'(z') / z' = u^2 z + u - 1$

(F est une translation) $\iff u^2 = 1$

$\iff u = 1$ ou $u = -1$

Donc : $E_1 = \{-1; 1\}$

2) Déterminons l'ensemble E_2

(F est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$) $\iff \begin{cases} |u^2| = 1 \\ \arg(u^2) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} |u^2| = 1 \\ 2\arg(u) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} |u| = 1 \\ \arg(u) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi] \end{cases}$

$\iff u = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $u = e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Donc : $E_2 = \left\{e^{i\frac{\pi}{4}}; e^{i\frac{5\pi}{4}}\right\}$

3) Déterminons l'ensemble E_3

(F est une homothétie de rapport -2) $\iff u^2 = -2$

$\iff u^2 = (\sqrt{2}\,i)^2$

$\iff u = i\sqrt{2}$ ou $u = -i\sqrt{2}$

Donc : $E_3 = \{i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}\}$

4) Montrons que F est la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'une homothétie de rapport -2

On a : $u = 1 - i$

Donc : $u^2 = (1-i)^2 = -2i$ et $u - 1 = -i$

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan

$F(M) = M' \iff z' = u^2 z + u - 1$

$\iff z' = -2iz - i$

• Soit Ω un point du plan

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2

Si $F = roh$, alors le point Ω est invariant par F

• Déterminons les points invariants par F

Soit $M(z)$ un point du plan

For more visit: L9ray.com CamScanner

(M est invariant par F) $\Leftrightarrow F(M) = M$

$\Leftrightarrow z = -2iz - i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-2-i}{5}$

Donc le point $\Omega\left(\dfrac{-2-i}{5}\right)$ est le seul point fixe de F.

• Montrons que $F = roh$

(où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport -2 et r est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$)

Soit $M(z)$ un point du plan

On pose : $\begin{cases} h(M) = M_1(z_1) \\ r(M_1(z_1)) = M_2(z_2) \\ F(M) = M'(z') \end{cases}$

Donc : $roh(M) = r(h(M))$

$= r(M_1)$

$= M_2$

Montrons que $M' = M_2$

• $h(M) = M_1(z_1) \Leftrightarrow z_1 - z_\Omega = -2(z - z_\Omega)$

• $r(M_1) = M_2(z_2) \Leftrightarrow z_2 - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_\Omega)$

Or $r(M_1) = roh(M)$

Donc : $roh(M) = M_2(z_2) \Leftrightarrow z_2 - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_\Omega)$

$\Leftrightarrow z_2 - z_\Omega = -2e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega)$

$\Leftrightarrow z_2 + \dfrac{2+i}{5} = -2i\left(z + \dfrac{2+i}{5}\right)$

$\Leftrightarrow z_2 = -2iz - i$

$\Leftrightarrow z_2 = z'$

$\Leftrightarrow M_2 = M'$

$\Leftrightarrow roh(M) = M'$

$\Leftrightarrow F(M) = M'$

Donc, pour tout point M du plan, $F(M) = r(h(M))$

D'où : $F = roh$

Exercices de synthèse

Exercice 39

Soit F l'application définie sur $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ par : $F(z) = \dfrac{iz-1}{z-i}$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

1) a) Vérifier que : $(\sqrt{3}-i\sqrt{3})^3=-6i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $F(z)=iz$.

c) Écrire les solutions de cette équation sous forme trigonométrique.

d) Soit A et B les points images des solutions de (E), dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Montrer que les points O, A et B sont alignés.

2) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$.

a) Montrer que : $F(z)=-\dfrac{z+\bar{z}}{|z-i|^2}+i\dfrac{z\bar{z}-1}{|z-i|^2}$.

b) En déduire que : $|z|=1\Longrightarrow F(z)\in\mathbb{R}$.

Exercice 40

Soit $m\in\mathbb{C}^*$;

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(3m-2i)z+2m^2-4mi=0$; (E)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) On suppose dans cette question que $m=1+i$.

Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que $|z_1|<|z_2|$.

a) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Vérifier que $-3z_1$ est une racine cubique du nombre complexe z_2, puis en déduire les deux autres racines cubiques de z_2 sous forme algébrique.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives i; $2m$ et $m-2i$. On suppose que m n'est pas un imaginaire pur.

a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) On construit à l'extérieur du triangle ABC le point D tel que le triangle BCD soit rectangle isocèle en D. Soit d l'affixe du point D.

Montrer que : $d=\dfrac{3m-im+2-2i}{2}$ ou $d=\dfrac{3m+im-2-2i}{2}$

c) Déterminer m pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.

Exercice 41

Le plan complexe est muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Partie 1 :

1) Placer les points $A(-4-6i)$; $B(14)$; $C(-4+6i)$; $A_1(3-7i)$; $B_1(9+5i)$ et $C_1(-3-i)$.

2) Déterminer l'affixe de chacun des points I; J et K milieux respectifs des segments $[AB]$; $[BC]$ et $[CA]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) Montrer que les points A_1 ; I et B_1 sont alignés.

On admet que les points B_1 ; J et C_1 sont alignés ainsi que les points C_1 ; K et A_1.

4) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IB_1}}\right)$.

On admet que : $\left(\overrightarrow{KA};\overrightarrow{KA_1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{JC};\overrightarrow{JC_1}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

5) Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$?

Partie 2 :

Soit f la transformation qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - 2i$

1) Déterminer $f(A)$; $f(B)$ et $f(C)$.

2) Montrer que la transformation f admet un point fixe Ω dont on déterminera l'affixe.

3) Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$; et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Montrer que : $f = roh$.

Exercice 42

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points $A(1)$; $A'(-1)$; $B(i)$ et $B'(-i)$.

À tout point $M(z)$ distinct de O ; A ; A' ; B et B', on associe les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ tels que: les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles isocèles et que: $\left(\overrightarrow{M_1B};\overrightarrow{M_1M}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M_2M};\overrightarrow{M_2A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) a) Vérifier que : $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$

b) Vérifier que : $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$

2) Dans cette question on cherche à déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est isocèle.

a) Montrer que : $OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z+1| = |z+i|$

En déduire l'ensemble des points M tels que $OM_1 = OM_2$ et construire cet ensemble.

b) Montrer que : $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$

c) Montrer que : $|z+1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

En déduire l'ensemble des points M tels que $OM_1 = M_1M_2$ et construire cet ensemble.

d) En déduire l'ensemble des points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral et construire cet ensemble.

Exercice 43

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^3 - 4z + 8 = 0$

b) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que $\text{Im}(z_1) > 0$.

- Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
- Placer les points $A(z_1)$ et $B(z_2)$.

2) Soit f la transformation qui à tout point $M(z)$ (avec $z \in \mathbb{C}^*$) associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{1}{\overline{z}}$.

a) Déterminer l'affixe de chacun des points A' et B' tels que : $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

b) Montrer que pour tout point M distinct de O; les points O; M et M' sont alignés et que : $OM' \times OM = 1$

3) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1-2\overline{z}}{\overline{z}}\right| = 2$

En déduire que : $|z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'|$

b) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $I(2)$ et de rayon 2

- Montrer que $[AB]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C})$
- Montrer que $M \in \mathscr{C} \setminus \{O\}$ si et seulement si M' appartient à une droite (D) dont on donnera une équation.
- Construire $(\mathscr{C})$ et (D).
- En déduire une méthode géométrique pour construire M' image de M par la transformation f si $M \in (\mathscr{C}) \setminus \{O\}$.

Exercice 44

Partie 1 :Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $P(z) = z^3 - (4-i)z^2 + 4(2-i)z + 8i$

1) a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Déterminer les nombres réels b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+i)(z^2 + bz + c)$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Partie 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

1) Construire les points A; B et C d'affixes respectives $2+2i$; $2-2i$ et $-mi$ où $m \in \mathbb{R}^*$ (pour placer le point C, prendre $m = 1$)

2) Déterminer en fonction de m l'affixe du point C' symétrique du point C par rapport à B.

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer, en fonction de m, l'affixe de chacun des points K et H images respectives des points C et C' par la rotation R.

4) Soit t la translation de vecteur $\vec{w}(4i)$.

On pose $t(C) = N$ et $t(C') = L$.

Déterminer en fonction de m les affixes z_N et z_L des points N et L (respectivement).

5) a) Montrer que A est le milieu des segments $[LN]$ et $[KH]$.

b) Montrer que : $\frac{z_H - z_A}{z_L - z_A} = i$

c) En déduire la nature du quadrilatère $KLHN$.

Exercice 45

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives:

$$a = -1 + i\sqrt{3}\ ;\ b = -1 - i\sqrt{3} \text{ et } c = 2.$$

1) a) Vérifier que : $\frac{b-c}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) En déduire la nature du triangle ABC.

2) Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC.

3) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $2(z+\overline{z}) + \overline{z} \times z = 0$.

a) Montrer que (Γ) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Vérifier que les points A et B appartiennent à (Γ).

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer l'image du point B par la rotation r.

b) Construire le point C_1 image du point C par la rotation r puis déterminer l'affixe de C_1.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 46

On considère la suite complexe (z_n) définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On note A_n le point d'affixe z_n.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_n - z_{n-1})$

b) En déduire d_n en fonction de n.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $L_n = \sum_{k=0}^{n} A_k A_{k+1}$

- Exprimer L_n en fonction de n.

- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n \equiv \arg(z_n)[2\pi]$.

a) Déterminer a_{n+1} en fonction de a_n.

b) En déduire a_n en fonction de n.

c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles les points O, A_0 et A_n sont alignés.

Exercice 47

Partie 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

On considère l'application t définie par : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t : z \longmapsto z^2 + z + 1$$

1) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que $t(z)$ soit un réel.

2) Soit z un nombre complexe.

Soit M et M' les points d'affixes z et $t(z)$ respectivement.

Déterminer l'ensemble F des points $M(z)$ tel que les points O, M et M' sont alignés.

Partie 2 :

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 + z + 1 = 0$.

b) Soit u et v les solutions de l'équation (E).

Vérifier que : $(\forall (n;m) \in \mathbb{N}^2)$; $u^{3m} = v^{3m} = 1$ et $(1+u)^{6n} = (1+v)^{6n}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Soit z un nombre complexe tel que :

$$\exists (p;q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ ; \ (1+z)^q = 1 \text{ et } z^p = 1.$$

a) Montrer que : $|z| = |1+z| = 1$

b) Soit θ un argument de z tel que $-\pi < \theta < \pi$

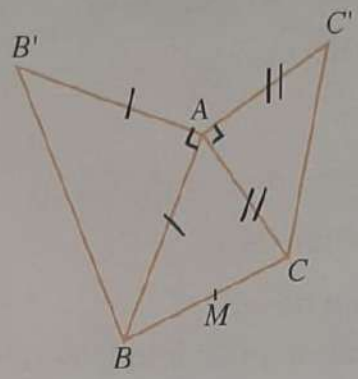
Montrer que : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$, puis déterminer z

Exercice 48

Soit ABC un triangle direct et M le milieu du segment $[BC]$.

Soit a; b; c et m les affixes respectives des points A; B; C et M.

On construit deux triangles BAB' et $C'AC$ rectangles isocèles en A (voir figure)



Soit b' et c' les affixes respectives des points B' et C'.

L'objectif de l'exercice est de prouver que $(AM) \perp (B'C')$.

1) a) Déterminer b' et c' en fonction de a, b et c.

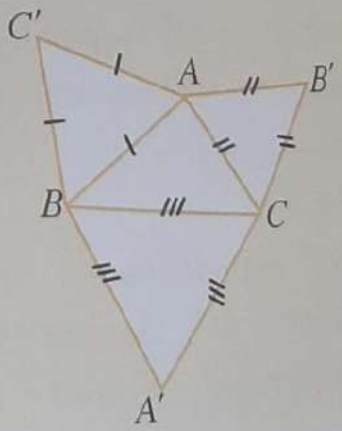
b) Déterminer m en fonction de b et c.

2) a) Écrire $c' - b'$ en fonction de a et m.

b) En déduire que : $B'C' = 2AM$ et que les droites $(B'C')$ et (AM) sont perpendiculaires.

Exercice 49

Soit ABC un triangle direct. On construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles équilatéraux directs $AC'B$; $BA'C$ et $CB'A$ (voir figure)



For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit a; b; c; a'; b' et c' les affixes respectives des points A; B; C; A'; B' et C'.

1) Déterminer a' en fonction de b et c.

Puis calculer b' et c' en fonction de a, b et c.

2) Montrer que : $a' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(aj + b + cj^2)$

Calculer de même $b' - b$ et $c' - c$; où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3) a) Montrer que : $AA' = BB' = CC'$

b) Montrer que les triangles $A'B'C'$ et ABC ont le même centre de gravité.

Exercice 50

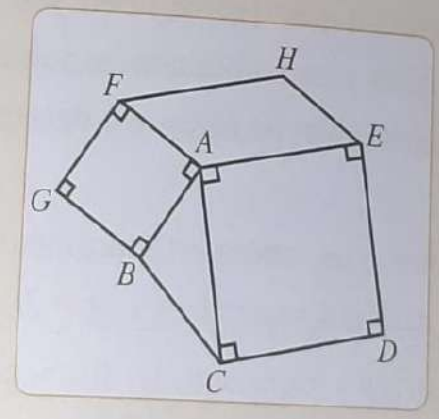
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points $A(a)$; $B(b)$ et $C(C)$ tels que: a et b sont des nombres complexes non nuls et $c = -b$.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les points A, B et C soient alignés.

2) Dans cette question, on suppose que les points A; B et C ne sont pas alignés, et que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est une base directe.

On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés $AFGB$ et $ACDE$ et le parallélogramme $AEHF$. (voir figure)



tels que les deux bases $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})$ et $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB})$ soient directes.

a) Soit r la rotation de centre A qui transforme C en E.

Montrer que : $e = -ib + a(1 - i)$ où e est l'affixe du point E.

b) Soit α; β et γ les affixes respectives des points D; H et F.

Déterminer α; β et γ en fonction de a et b.

c) En déduire que : $EF = 2.OA$; $(EF) \perp (OA)$; $BD = CH$ et $(BD) \perp (CH)$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 51

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points B; C; D et E d'affixes respectives $b=1-i$; $c=-1-i$; $d=-1-3i$ et $e=1-3i$

1) Vérifier que : $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et que le quadrilatère $BCDE$ est un carré.

2) Calculer $|b|$; $|c|$; $|d|$ et $|e|$.

3) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O passant par le point B.

Donner une équation du cercle $(\mathscr{C})$.

4) Soit Q un autre point de $\mathscr{C}$ tel que $Q\neq B$ et $Q\neq C$.

On pose : $q=x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ où q est l'affixe du point Q.

Soit F et G deux points du plan tels que le quadrilatère $QBFG$ soit un carré et $(\overrightarrow{QB};\overrightarrow{QG})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On pose : $z=\frac{g-q}{b-q}$ où g est l'affixe du point G.

a) Donner une interprétation géométrique du module et d'argument de z.

b) En déduire z.

5) a) Montrer que : $g=(1+x+y)+i(1-x+y)$.

b) En déduire $|g|$ en fonction de x et y.

6) Exprimer $|z|$ en fonction de y seulement.

7) Montrer géométriquement que : $|g|=|f|$ où f est l'affixe du point F.

8) Déterminer les valeurs de x et y pour que les points E; D; G et F appartiennent au cercle de centre O et de rayon r à déterminer.

Exercice 52

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Soit A et B les points d'affixes respectives i et $-2i$.

Soit f la transformation qui à tout point M distinct de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\frac{2z-i}{iz+1}$.

1) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. On pose : $z-i=re^{i\theta}$ où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

a) Donner une interprétation géométrique de r et θ.

b) Montrer que : $(z'+2i)(z-i)=1$.

c) On pose : $z'+2i=r'e^{i\theta'}$ où $r'>0$ et $\theta'\in\mathbb{R}$.

Déterminer r' et θ' en fonction de r et θ et donner une interprétation géométrique de r' et θ'

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.

a) Montrer que si $M \in (\mathscr{C})$, alors le point M' appartient à un cercle $(\mathscr{C}')$ que l'on précisera.

b) Le cercle $(\mathscr{C}')$ est-il image de $(\mathscr{C})$ par la transformation f ?

3) Soit N un point d'affixe $n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

a) Montrer que $N \in (\mathscr{C})$.

b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}; \overrightarrow{AN}\right)$ puis construire $(\mathscr{C})$ et N.

c) En déduire la construction du point $N' = f(N)$.

Exercice 53

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1) Montrer que : $1 + \omega + \omega^2 = 0$ et $\overline{\omega} = \omega^2$.

2) On considère l'ensemble : $E = \{z \in \mathbb{C} / |z| = |1 + z| = 1\}$

a) Montrer que $\omega \in E$.

b) Soit $z = x + yi$ un nombre complexe où x et y sont des nombres réels.

Montrer que : $z \in E \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \text{ et } |y| = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) En déduire que : $E = \{\omega; \overline{\omega}\}$.

3) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon r.

Soit $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle $(\mathscr{C})$.

On suppose que O est le centre de gravité du triangle ABC.

On pose : $p = \frac{b}{a}$ et $q = \frac{c}{a}$.

a) Montrer que : $|p| = |q| = 1$ et $1 + p = -q$.

b) En utilisant la question 2) b), montrer que : $p = \omega$ ou $p = \overline{\omega}$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p = \omega$.

c) Montrer que :

$$\begin{cases} c - a = (\overline{\omega} - 1)a \\ c - b = (\omega - 1)b \\ b - a = (\omega - 1)a \end{cases}$$

d) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 54

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) : $z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$

où θ est un paramètre réel de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

b) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_θ) telles que $\text{Im}(z_1) = \tan\theta$.

Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

Montrer que le triangle OM_1M_2 est isocèle en O.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^{2n} - 2z^n + \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$

Déterminer les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

Exercice 55

Partie 1 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A; B; M et M' d'affixes respectives : 1; -1; z et Z, tels que $Z = \frac{z+1}{z-1}$ avec $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1;1\}$.

1) Montrer que : $|z| = 1 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}$

2) On pose : $z = e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$ et $\theta \neq 0$.

a) Montrer que : $Z = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et en déduire $|Z|$ et $\arg(Z)$.

b) Montrer que : $\left(\overrightarrow{M'A};\overrightarrow{M'B}\right) \equiv \theta[2\pi]$, puis construire M et M' dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Partie 2 :

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

On considère l'équation : (E) : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = \sqrt{2}$

1) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$S = \{z_k; k \in \{0;1;2;\cdots;n-1\}\} \cup \{\overline{z_k}; k \in \{0;1;2;\cdots;n-1\}\}$

où $z_k = \frac{-i}{\tan(\theta_k)}$ avec $\theta_k = \frac{\pi}{8n} + \frac{k\pi}{n}$

2) On considère dons $\mathbb{C}$ le polynôme complexe :

$$P(z) = \sqrt{2}(z^2-1)^n - (z+1)^{2n} - (z-1)^{2n} \; ; \; z \in \mathbb{C}.$$

a) Montrer que : $(E) \Leftrightarrow P(z) = 0$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

b) Montrer que : $P(z)=(\sqrt{2}-2)\prod_{k=0}^{n-1}\left(z^2+\frac{1}{\tan^2(\theta_k)}\right)$.

En déduire la valeur du produit : $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{8n}+\frac{k\pi}{n}\right)}$.

Exercice 56

Soit m un entier naturel non nul.

Soit $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\cdots;\alpha_m)\in\mathbb{C}^m$.

On considère le polynôme : $P(z)=z^m+\alpha_m z^{m-1}+\alpha_{m-1}z^{m-2}+\cdots+\alpha_2 z+\alpha_1$ avec $z\in\mathbb{C}$.

Soit $z_1;z_2;\cdots;z_m$ les racines de $P(z)$.

1) Montrer que : $\prod_{k=1}^{m}z_k=(-1)^m P(0)$.

2) Soit $\theta\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

On considère l'application $P_{n,\theta}$ définie par :

$P_{n,\theta}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$

$z\longmapsto(z+1)^n-e^{i2n\theta}$

a) Déterminer les solutions de l'équation $P_{n,\theta}(z)=0$ et calculer le produit des solutions de cette équation.

b) On pose : $f_n(\theta)=\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+k\frac{\pi}{n}\right)$

Montrer que : $f_n(\theta)=\frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$

Calculer $\lim_{\theta\to 0}\frac{f_n(\theta)}{\sin\theta}$

c) En déduire la valeur du produit $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\cdots\times\sin\left((n-1)\frac{\pi}{n}\right)$.

Exercice 57

Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 1$.

Pour tout $k\in\{1;2;\cdots;n-1\}$, on pose : $u_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et $v_k=e^{-i\frac{k\pi}{n}}$

1) Montrer que : $\prod_{k=1}^{n-1}v_k=(-1)^{n-1}\times(i)^{n-1}$.

2) a) Exprimer u_k-1 en fonction de v_k.

b) Calculer : $\prod_{k=1}^{n-1}(u_k-1)$

c) En déduire que : $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 58

Partie A :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E): z^2-(1+2i)z+1+7i=0$$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta=(3-4i)^2$

2) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

(On note z_1 la solution telle que $\mathrm{Re}(z_1)>0$)

3) Montrer que : $\frac{z_2}{z_1}=\sqrt{2}\,.e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Partie B:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a=2-i$ et $b=-1+3i$.

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et soit T la translation qui transforme le point A au point O.

1) a) Soit c l'affixe du point C ; image du point A par la rotation R.

Déterminer le nombre complexe c.

b) Montrer que : $T(C)=B$

2) Soit D le point du plan complexe pour lequel $OCDB$ est un parallélogramme.

Déterminer d l'affixe du point D et vérifier que le point C est le milieu du segment $[AD]$.

3) Montrer que le nombre $\left(\frac{a-d}{b-d}\right)\times\frac{b}{a}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 59

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E): z^2-(1+i)z+2+2i=0$$

1) a) Vérifier que $(1-3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E).

b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 le nombre complexe imaginaire pur).

c) Montrer que : $\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

On considère le point A d'affixe z_1 et le point B d'affixe z_2.

a) Déterminer le nombre complexe e, affixe du point E milieu du segment $[AB]$.

b) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et soit c l'affixe du point C image du point E par la rotation r. Montrer que : $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$.

c) On considère D le point d'affixe $d = 1 + \frac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\frac{z_2 - d}{c - d} \times \frac{c - z_1}{z_2 - z_1}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 60

Partie A:

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + i = 0$.

(On note a la solution telle que : $\mathrm{Re}(a) > 0$).

2) a) Déterminer le module et un argument de $1 + a$.

b) En déduire que : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Vérifier que : $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$ puis en déduire une forme trigonométrique de $1 - a$.

Partie B:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives a, $-a$, z et z'. On suppose de plus que : $zz' + i = 0$

1) Soit N le point d'affixe $\overline{z}$ ($\overline{z}$ étant le conjugué de z).

Montrer que : $(ON) \perp (OM')$

2) a) Montrer que : $z' - a = i\left(\frac{z - a}{az}\right)$

b) Montrer que si $z \neq -a$ alors $z' \neq -a$ et $\frac{z' - a}{z' + a} = -\left(\frac{z - a}{z + a}\right)$

3) On suppose que les points A, B, M ne sont pas alignés.

Montrer que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 61

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie 1:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation dans laquelle z est l'inconnue telle que :

$(E): z^3+(2-i)z^2+(m^2+1-2i)z-i(1+m^2)=0$

1) a) Vérifier que le nombre complexe i est une solution de (E) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b) Déterminer sous la forme algébrique, les valeurs de m pour que le produit des solutions de l'équation (E) soit égal à 1.

2) On pose : $z_1=-1+im$, $z_2=-1-im$ et $m=e^{i\alpha}$ où $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

Partie 2:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives : m, $z_1=-1+im$ et $z_2=-1-im$.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points M, M_1 et M_2 soient alignés.

2) On suppose que : $m\overline{m}+\mathrm{Re}(m)\neq 0$

a) Soit R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=iz-1$

Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'affixe de son centre Ω et une mesure de son angle.

b) Montrer que : $\frac{z_2-m}{z_2-z_1}\in i\mathbb{R}\iff m\overline{m}-\mathrm{Im}(m)=0$

c) En déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour lesquels les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 62 **Session Normale 2017**

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie I:

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$(E): 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (2im)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m)

Partie II:

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

On suppose que $m \in \mathbb{C} - \{0, 1, i\}$ et on pose:

$$z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1) \text{ et } z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$$

On considère les points A, B, M, M_1, M_2 d'affixes respectives 1, $i, m; z_1$ et z_2.

1) a) Vérifier que: $z_1 = iz_2 + 1$

b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1+i}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) a) Vérifier que: $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i\frac{m-1}{m-i}$

b) Montrer que si les points M, M_1 et M_2 sont alignés, alors le point M appartient au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

c) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 sont Cocycliques.

(remarquer que: $\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$)

Exercice 63 **Session de Rattrapage 2017**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Soit M le point d'affixe le nombre complexe non nul z et M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

1) Déterminer le nombre complexe z tel que les deux points M et M' soient confondus.

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) On suppose que le point M est différent des deux points A et B d'affixes respectifs 1 et -1.

Montrer que: $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$

Montrer que: Si le point M appartient à (Δ), alors le point M' appartient à (Δ).

4) Soit (Γ) le cercle dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

Montrer que: Si le point M appartient à (Γ), alors le point M' appartient à (AB).

Exercice 64 Session Normale 2018

Soit m un nombre complexe

Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation:

$$(E_m): z^2+(im+2)z+im+2-m=0$$

1) a) Vérifier que $\Delta=(im-2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

b) Donner, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)

2) Pour $m=i\sqrt{2}$, écrire les deux solutions de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

Partie II:

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A,Ω,M et M' d'affixes respectives $a=-1-i$, $\omega=i$, m et $m'=-im-1+i$

1) Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'.

a) Vérifier que Ω est le centre de la rotation R

b) Déterminer l'affixe b de B, où B est le point tel que $A=R(B)$.

2) a) Vérifier que: $m'-a=\frac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$

b) En déduire que les points A,M et M' sont alignés si et seulement si les points A,B,Ω, et M sont Cocycliques.

c) Montrer que l'ensemble des points M tels que les points A,M et M' sont alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 65 Session de Rattrapage 2018

1) Pour tout nombre complexe non nul z différent de i on pose: $h(z)=i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$

a) Vérifier que: $h(z)=z \Leftrightarrow z^2-2iz-2=0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: (E); $z^2-2iz-2=0$

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

On désigne par a et b les solutions de l'équation (E) tel que $\mathrm{Re}(a)=1$

Soit z un nombre complexe différent de i de a et de b et les points $M(z)$ $M'(h(z))$, $A(a)$ et $B(b)$.

a) Montrer que: $\frac{h(z)-a}{h(z)-b}=-\frac{z-a}{z-b}$

b) En déduire que: $\left(\widehat{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}}\right)\equiv\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right)[2\pi]$

3) a) Montrer que si les points M, A et B sont alignés alors les points M, A, B et M' sont alignés.

b) Montrer que si les points M, A et B ne sont pas alignés alors les points M, A, B et M' sont cocycliques.

Exercice 66 Session Normal Juin 2019

Soit m un nombre complexe non réel $(m\in\mathbb{C}-\mathbb{R})$

I. On considère dans $\mathbb{C}$, l'equation d'inconnue z définie par:

(E): $z^2-(1+i)(1+m)z+2im=0$

1) a- Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b- Déterminer z_1 et z_2, les deux solutions de l'équation (E)

2) On suppose dans cette question que $m=e^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$

a- Déterminer le module et un argument de z_1+z_2

b- Montrer que si $z_1z_2\in\mathbb{R}$ alors $z_1+z_2=2i$

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points suivants:

A le point d'affixe $a=1+i$, B le point d'affixe $b=(1+i)m$, C le point d'af-

For more visit: L9ray.com CamScanner

fixe $c = 1 - i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$

1) a- Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$

b- Calculer $\frac{b-a}{\omega}$

c- En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$

2) La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

a- Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\frac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.

b- En déduire h en fonction de m

Exercice 67 **Session de Rattrapage Juillet 2019**

Soit α un nombre complexe non nul.

I. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$(E_\alpha): z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

1) a- Vérifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = \alpha^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

2) Sachant que $\alpha = |\alpha| e^{i\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, mettre les deux solutions de l'équation (E_α) sous forme exponentielle.

II. On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points Ω, M_1 et M_2 d'affixes respectives α, $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) a- Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

b- En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et OM_1M_2 sont équilatéraux.

2) a- Vérifier que: $z_1 - z_2 = \alpha$

b- Montrer que les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont perpendiculaires.

c- En déduire que $O\Omega M_1 M_2$ est un losange.

3) Montrer que pour tout réel θ , le nombre: $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha| e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha| e^{i\theta}}$ est un réel.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 39

1) a) Vérifions que $(\sqrt{3}-i\sqrt{3})^2=-6i$

On a:

$(\sqrt{3}-i\sqrt{3})^2=\sqrt{3}^2(1-i)^2=3\times(-2i)=-6i$

Donc: $(\sqrt{3}-i\sqrt{3})^2=-6i$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $F(z)=iz$

Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$;

$$F(z)=iz \Leftrightarrow \frac{iz-1}{z-i}=iz$$
$$\Leftrightarrow iz-1=iz(z-i)$$
$$\Leftrightarrow iz^2+(1-i)z+1=0$$

- Le discriminant de cette équation est $\Delta=(1-i)^2-4i=-6i=(\sqrt{3}-i\sqrt{3})^2$
- Les solutions de cette équation sont:

$$z_1=\frac{-1+i+\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2i}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$$z_2=\frac{-1+i-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{2i}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est:

$$S=\left\{\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)i;\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i\right\}$$

c) **Écrivons les solutions de (E) sous forme trigonométrique**

- $z_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$

- On a: $|z_1|=\left|\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right|\times|1+i|=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Donc: $z_1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• On a: $|z_2| = \left|\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right| \times |1+i| = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

Donc: $z_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

d) Montrons que les points O, A et B sont alignés.

On a: $A(z_1)$; $B(z_2)$ et $O(0)$

et $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)}{\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$

Puisque $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} \in \mathbb{R}$, alors les points O, A et B sont alignés.

2) a) Montrons que: $F(z) = -\frac{z+\bar{z}}{|z-i|^2} + i\frac{z\bar{z}-1}{|z-i|^2}$

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$

$$F(z) = \frac{iz-1}{z-i}$$
$$= \frac{(iz-1)(\bar{z}+i)}{(z-i)(\bar{z}+i)}$$
$$= \frac{iz\bar{z} - z - \bar{z} - i}{|z-i|^2}$$
$$= -\frac{z+\bar{z}}{|z-i|^2} + i\left(\frac{z\bar{z}-1}{|z-i|^2}\right)$$

Donc: $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$; $F(z) = -\frac{z+\bar{z}}{|z-i|^2} + i\left(\frac{z\bar{z}-1}{|z-i|^2}\right)$

b) Déduisons que: $|z| = 1 \Rightarrow F(z) \in \mathbb{R}$.

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$

Si $|z| = 1$, alors $z\bar{z} = 1$, donc $z\bar{z} - 1 = 0$

D'où $F(z) = -\frac{z+\bar{z}}{|z-i|^2}$

Or: $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $|z-i|^2 \in \mathbb{R}^*$

Donc $F(z)$ est un réel.

Conclusion: $|z| = 1 \Rightarrow F(z) \in \mathbb{R}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 40

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$(E): z^2-(3m-2i)z+2m^2-4mi=0$$

- Le discriminant de cette équation est $\Delta=(3m-2i)^2-4(2m^2-4mi)$

$$=m^2+4mi-4=(m+2i)^2$$

- Les solutions de cette équation sont:

$z=\dfrac{3m-2i+m+2i}{2}=2m$ et $z'=\dfrac{3m-2i-m-2i}{2}=m-2i$

Donc $S=\{2m;m-2i\}$

2) Dans cette question $m=1+i$

donc les solutions de l'équation (E) dans ce cas sont:

$z=2+2i$ et $z'=1-i$

comme $|z_1|<|z_2|$ et $|2+2i|=2\sqrt{2}$ et $|1-i|=\sqrt{2}$, alors:

$z_1=z'=1-i$ et $z_2=z=2+2i$

a) Écrivons z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

* $|z_1|=|1-i|=\sqrt{2}$
* $z_1=1-i$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

* $|z_2|=|2+2i|=2\sqrt{2}$
* $z_2=2+2i$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

b) Vérifions que $-z_1$ est une racine cubique de z_2

Méthode 1:

$$(-z_1)^3=(-1+i)^3=(-1+i)^2(-1+i)$$

$$=-2i(-1+i)$$

$$=2i+2$$

$$=z_2$$

Puisque $(-z_1)^3=z_2$, alors $-z_1$ est une racine cubique de z_2.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Méthode 2:

$$\begin{aligned} -z_1 &= -\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= -\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}\times e^{i\pi}\times e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}\times e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{aligned}$$

Donc $(-z_1)^3 = (\sqrt{2})^3 \times e^{i\frac{9\pi}{4}}$

$$= 2\sqrt{2}\times e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= z_2$$

Donc $-z_1$ est une racine cubique de z_2.

• Déterminons les deux autres racines cubiques de z_2.

$$Z^3 = z_2 \Leftrightarrow Z^3 = (-z_1)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{Z}{z_1}\right)^3 = 1 \quad ; (\text{car } z_1 \neq 0)$$

Donc $-\frac{Z}{z_1}$ est une racine cubique de l'unité ; or les racines cubiques de l'unité sont: 1, j et $\overline{j}$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Donc: $-\frac{Z}{z_1} = 1$ ou $-\frac{Z}{z_1} = j$ ou $-\frac{Z}{z_1} = \overline{j}$

D'où: $Z = -z_1$ ou $Z = -jz_1$ ou $Z = -\overline{j}z_1$

Donc les deux autres racines cubiques de z_2 sont:

$$\begin{aligned} j\times(-z_1) &= \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times(-1+i) \\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

et $\overline{j}\times(-z_1) = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+i)$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

3) a) Montrons que les points A, B et C ne sont pas alignés.

On a: $A(i)$; $B(2m)$ et $C(m-2i)$ • Puisque $m \notin (i\mathbb{R})$, alors $A \neq B$

Calculons le quotient: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{m-2i-i}{2m-i} = \frac{m-3i}{2m-i}$$

(A, B et C sont alignés) $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$\Leftrightarrow \frac{m-3i}{2m-i} = \overline{\left(\frac{m-3i}{2m-i}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{m-3i}{2m-i} = \frac{\overline{m}+3i}{2\overline{m}+i}$$
$$\Leftrightarrow (m-3i)(2\overline{m}+i) = (2m-i)(\overline{m}+3i)$$
$$\Leftrightarrow 5i(m+\overline{m}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \overline{m} = -m$$
$$\Leftrightarrow m \in i\mathbb{R}$$

Or $m \notin i\mathbb{R}$, donc $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \notin \mathbb{R}$, et par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrons que:

$$d = \frac{3m - im + 2 - 2i}{2} \quad \text{ou} \quad d = \frac{3m + im - 2 - 2i}{2}$$

(Le triangle BCD est rectangle isocèle en D) si et seulement si:

$$\left(\begin{cases} DB = DC \\ (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} ou \begin{cases} DB = DC \\ (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_D - z_B}{z_D - z_C} = i \text{ ou } \frac{z_D - z_B}{z_D - z_C} = -i\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{d-2m}{d+2i-m} = i \text{ ou } \frac{d-2m}{d+2i-m} = -i$$
$$\Leftrightarrow d = \frac{2m-2-mi}{1-i} \text{ ou } d = \frac{2m+2+mi}{1+i}$$
$$\Leftrightarrow d = \frac{3m+mi-2-2i}{2} \text{ ou } d = \frac{3m-mi-2i+2}{2}$$

c) Déterminons m pour que $ABCD$ soit un carré

Le triangle BCD est rectangle isocèle en D, donc, pour que $ABCD$ soit un carré, il suffit que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A.

(ABC rectangle isocèle en A) $\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$
$$\Leftrightarrow \frac{2m-i}{m-3i} = i \text{ ou } \frac{2m-i}{m-3i} = i$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{3+i}{2-i} \text{ ou } m = \frac{-3+i}{2+i}$$
$$\Leftrightarrow m = 1+i \text{ ou } m = -1+i$$

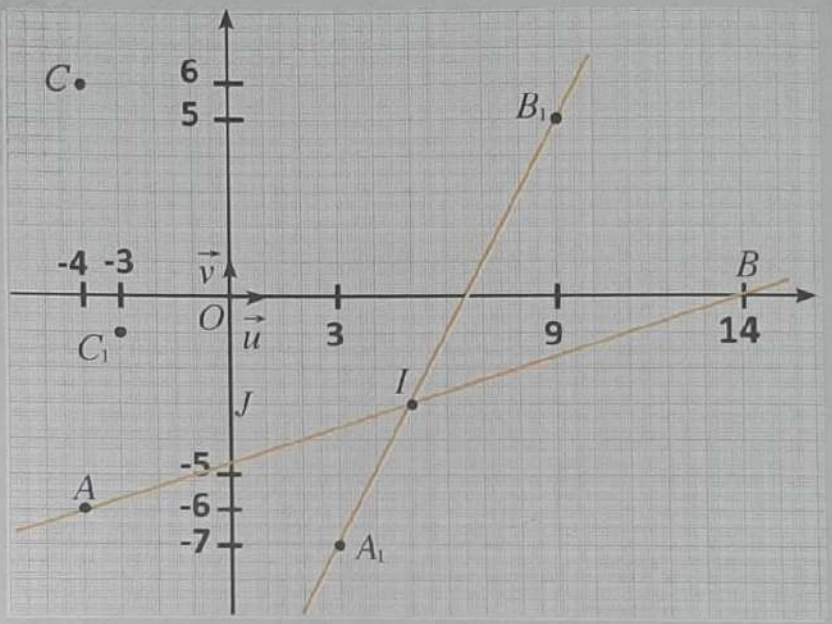
For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc, pour que $ABCD$ soit un carré il faut et il suffit que $m = 1 + i$ ou $m = -1 + i$.

Exercice 41

Partie 1:

1) Placons les points $A(-4-6i)$; $B(14)$; $C(-4+6i)$; $A_1(3-7i)$; $B_1(9+5i)$ et $C_1(-3-i)$



2) Déterminons les affixes des points $I;J$ et K

* I milieu de $[AB]$, donc: $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

D'où: $z_I = 5 - 3i$

* J milieu de $[BC]$, donc: $z_J = \frac{z_B + z_C}{2}$

D'où: $z_J = 5 + 3i$

* K milieu de $[CA]$, donc $z_K = -4$

3) Montrons que les points A_1, I et B_1 sont alignés

$$\frac{z_I - z_{A_1}}{z_{B_1} - z_{A_1}} = \frac{5 - 3i - 3 + 7i}{9 + 5i - 3 + 7i} = \frac{2 + 4i}{6 + 12i} = \frac{2(1 + 2i)}{6(1 + 2i)} = \frac{1}{3}$$

Puisque $\frac{z_I - z_{A_1}}{z_{B_1} - z_{A_1}} \in \mathbb{R}$, alors les points A_1, I et B_1 sont alignés.

4) Déterminons une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IB_1}}\right)$

$\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IB_1}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{B_1} - z_I}{z_B - z_I}\right)[2\pi]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$$\frac{z_{B_1}-z_I}{z_B-z_I}=\frac{9+5i-5+3i}{14-5+3i}$$
$$=\frac{4+8i}{9+3i}$$
$$=\frac{2}{3}(1+i)$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc: $\arg\left(\frac{z_{B_1}-z_I}{z_B-z_I}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où: $(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IB_1})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

5) Déterminons l'image de la droite (AB) par la rotation R de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$

* I est le centre de R, donc $R(I)=I$

* Puisque $(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IB_1})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$, alors $R((IB))=(IB_1)$

Or $A\in(IB)$ et $A_1\in(IB_1)$

Donc: $R((AB))=(A_1B_1)$

Donc l'image de la droite (AB) par R est la droite (A_1B_1).

Partie 2:

1) Déterminons $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$

* $f(A)=A'\Leftrightarrow z_{A'}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_A+2-2i$

$\Leftrightarrow z_{A'}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(-4-6i)+2-2i$

$\Leftrightarrow z_{A'}=3-7i=z_{A_1}$

Donc $f(A)=A_1$

* On montre de même que:

$f(B)=B_1$ et $f(C)=C_1$

2) Montrons que f admet un seul point fixe

Soit $M(z)$ un point du plan.

($M(z)$ est invariant par f) $\Leftrightarrow f(M)=M$

$\Leftrightarrow z=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+2-2i$

$\Leftrightarrow z=4$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc le point $\Omega(4)$ est le seul point invariant par f.

3) Montrons que $f = roh$

Soit $M(z)$ un point du plan.

- $(roh)(M) = r(h(M))$

On pose: $f(M) = M'$; $h(M) = M_1(z_1)$ et $r(M_1) = M_2(z_2)$

- $h(M) = M_1(z_1) \Leftrightarrow z_1 - \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(z - \omega)$
- $r(M_1) = M_2(z_2) \Leftrightarrow z_2 - \omega = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_1 - \omega)$
- $(roh)(M) = M_2 \Leftrightarrow r(h(M)) = M_2$

$$\Leftrightarrow r(M_1) = M_2$$
$$\Leftrightarrow z_2 - \omega = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_1 - \omega)$$
$$\Leftrightarrow z_2 - \omega = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(z - \omega)$$
$$\Leftrightarrow z_2 - 4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z - 4)$$
$$\Leftrightarrow z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - 2i$$
$$\Leftrightarrow z_2 = z'$$
$$\Leftrightarrow (roh)(M) = f(M)$$

Donc, pour tout point M du plan, $(roh)(M) = f(M)$, d'où $f = roh$.

Exercice 42

1) a) Vérifions que $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; -1; -i; i\}$

- Le triangle BMM_1 est rectangle isocèle en M_1 tel que $\left(\overrightarrow{M_1B}; \overrightarrow{M_1M}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc M est l'image de B par la rotation de centre M_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

donc: $z - z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_1)$; c'est-à-dire: $z - z_1 = i(i - z_1)$

- Le triangle AMM_2 est rectangle isocèle en M_2 tel que:

$$\left(\overrightarrow{M_2M}; \overrightarrow{M_2A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc: A est l'image de M par la rotation de centre M_2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

d'où: $z_A - z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_2)$ C'est-à-dire: $1 - z_2 = i(z - z_2)$

b) Vérifions que: $z_1 = \frac{1+i}{2}(z + 1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z + i)$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; -1; -i; i\}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• $z - z_1 = i(i - z_1) \Leftrightarrow -z_1 + iz_1 = -1 - z$

$\Leftrightarrow z_1 = \dfrac{-1-z}{-1+i}$

$\Leftrightarrow z_1 = \dfrac{1+i}{2}(1+z)$

• $1 - z_2 = i(z - z_2) \Leftrightarrow (-1+i)z_2 = i(z+i)$

$\Leftrightarrow z_2 = \dfrac{1-i}{2}(z+i)$

2) a) Montrons que: $OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z+1| = |z+i|$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; -1; i; -i\}$

$OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{1+i}{2}(1+z)\right| = \left|\dfrac{1-i}{2}(z+i)\right|$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}|1+i| \times |1+z| = \dfrac{1}{2}|1-i| \times |z+i|$

$\Leftrightarrow |1+z| = |z+i|$

Déduisons l'ensemble des points M tels que $OM_1 = OM_2$

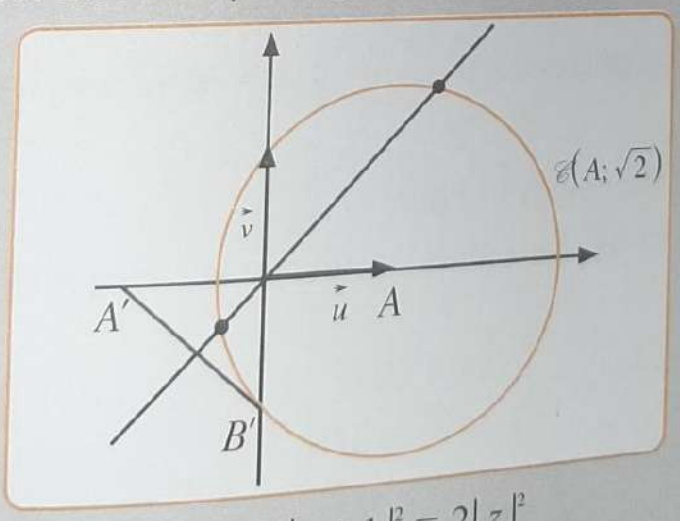
$OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |1+z| = |z+i|$

$\Leftrightarrow A'M = B'M$

$\Leftrightarrow (M$ appartient à la médiatrice du segment $[A'B'])$

Donc l'ensemble des points M tels que $OM_1 = OM_2$ est la médiatrice du segment $[A'B']$.

• Construisons cet ensemble (voir figure)



b) Montrons que: $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; -1; 1; i; -i\}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2 - z_1|$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1+i}{2}(z+1)\right| = \left|\frac{1-i}{2}(z+i) - \frac{1+i}{2}(1+z)\right|$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|z+1| = |-iz|$

$\Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$

Donc: $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$

c) Montrons que: $|z+1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2$

Soit $z \in \mathbb{C}$

- $|z+1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow (z+1)(\overline{z}+1) = 2z\overline{z}$

$\Leftrightarrow z\overline{z} + z + \overline{z} + 1 = 2z\overline{z}$

$\Leftrightarrow z\overline{z} - z - \overline{z} - 1 = 0$

- $|z-1|^2 = 2 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1) = 2$

$\Leftrightarrow z\overline{z} - z - \overline{z} - 1 = 0$

Donc: $|z+1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2$.

- Déduisons l'ensemble des points M tels que: $OM = M_1M_2$

$OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$

$\Leftrightarrow |z-1|^2 = 2$

$\Leftrightarrow |z-1| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow AM = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(A;\sqrt{2})$

Donc l'ensemble des points M tels que $OM_1 = M_1M_2$ est le cercle de centre A de rayon $\sqrt{2}$.

Construisons cet ensemble (voir figure).

d) Déduisons l'ensemble des points M tel que le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

$(OM_1M_2$ est équilatéral$) \Leftrightarrow \begin{cases} OM_1 = OM_2 \\ OM_1 = M_1M_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ appartient à la médiatrice du segment } [A'B'] \\ M \in \mathscr{C}(A;\sqrt{2}) \end{cases}$

Donc l'ensemble des points M tel que le triangle OM_1M_2 est équilatéral est l'intersection du cercle $\mathscr{C}(A;\sqrt{2})$ et de la médiatrice de $[A'B']$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 43

1) a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 4z + 8 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = -16 = (4i)^2$

Donc les solutions de cette équation sont: $z = \frac{4+4i}{2} = 2+2i$

$z' = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$

Donc: $S = \{2+2i\,;\,2-2i\}$

b) Écrivons z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

on a: $\begin{cases} \mathrm{Im}(2+2i) = 2 \\ \mathrm{Im}(2-2i) = -2 \end{cases}$

Puisque $\mathrm{Im}(z_1) > 0$; alors $z_1 = 2+2i$ et $z_2 = 2-2i$

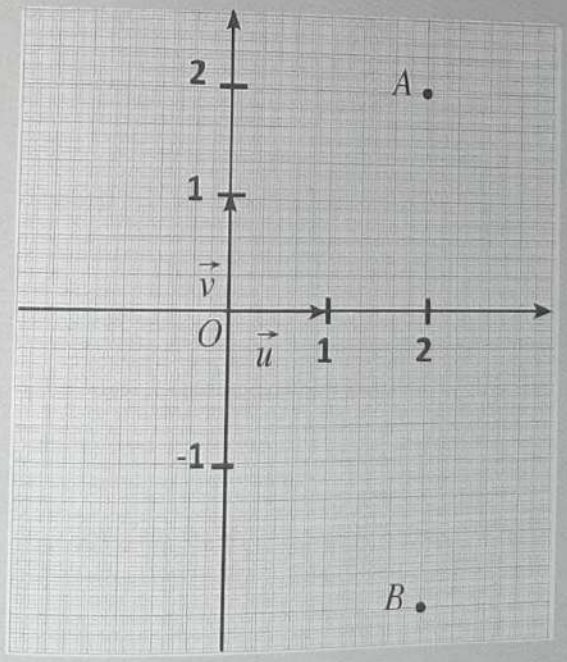
- $|z_1| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$

$$z_1 = 2+2i$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

- $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

* Plaçons les points $A(z_1)$ et $B(z_2)$

Puisque $z_2 = \overline{z_1}$, alors les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. (voir figure)



2) a) Déterminons $z_{A'}$ et $z_{B'}$

On a: $A(2+2i)$ et $A' = f(A)$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

- $A' = f(A) \Leftrightarrow z_{A'} = \dfrac{1}{z_A}$

$\Leftrightarrow z_{A'} = \dfrac{1}{2-2i}$

$\Leftrightarrow z_{A'} = \dfrac{2+2i}{8} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i$

- $B' = f(B) \Leftrightarrow z_{B'} = \dfrac{1}{z_B}$

$\Leftrightarrow z_{B'} = \dfrac{1}{2+2i}$

$\Leftrightarrow z_{B'} = \dfrac{2-2i}{8} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$

b) Montrons que les points $O; M$ et M' sont alignés

Soit $M(z)$ un point du plan tel que $M \neq O$. $M' = f(M)$

$M'(z') = f(M) \Leftrightarrow z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$

- $\dfrac{z_{M'} - z_O}{z_M - z_O} = \dfrac{z'}{z} = \dfrac{\frac{1}{\overline{z}}}{z} = \dfrac{1}{z\overline{z}} = \dfrac{1}{|z|^2}$

Puisque $|z|^2 \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{z'}{z} \in \mathbb{R}$; donc les points $O; M$ et M' sont alignés.

- Montrons que $OM' \times OM = 1$

$$\begin{aligned} OM' \times OM &= |z'| \times |z| \\ &= \left|\frac{1}{\overline{z}}\right| \times |z| \\ &= \frac{1}{|z|} \times |z| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc: $OM' \times OM = 1$

3) a) Montrons que: $|z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-2\overline{z'}}{z'}\right| = 2$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$; $\left|\dfrac{1-2\overline{z'}}{\overline{z'}}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-\frac{2}{z}}{\frac{1}{z}}\right| = 2$

$\Leftrightarrow |z| \times \left|\dfrac{z-2}{z}\right| = 2$

$\Leftrightarrow |z-2| = 2$

Donc: $|z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-2\overline{z'}}{\overline{z'}}\right| = 2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• Déduisons que: $|z-2|=2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}-z'\right|=|z'|$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

$$|z-2|=2 \Leftrightarrow \left|\frac{1-2\overline{z'}}{\overline{z'}}\right|=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2\left(\frac{1}{2}-\overline{z'}\right)\right|}{|\overline{z'}|}=2$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\frac{1}{2}-\overline{z'}\right|=2|\overline{z'}|$$

$$\Leftrightarrow \left|\overline{\frac{1}{2}-\overline{z'}}\right|=|z'|$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}-z'\right|=|z'|$$

Donc: $|z-2|=2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}-z'\right|=|z'|$

b) • Montrons que $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}(I;2)$

Pour montrer que $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}(I;2)$; il suffit de montrer que: $\begin{cases} A \in (\mathscr{C}) \\ B \in (\mathscr{C}) \\ I \text{ milieu de } [AB] \end{cases}$

* On a: $A(2+2i)$ et $I(2)$,

donc $IA=|z_A-z_I|=|2i|=2$; d'où $\boxed{A \in (\mathscr{C})}$

* On a: $B(2-2i)$, donc $IB=|-2i|=2$; d'où $\boxed{B \in (\mathscr{C})}$

* $\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{2+2i+2-2i}{2}=2=z_I$; Donc I est le milieu de $[AB]$

Conclusion: $[AB]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C})$

• Montrons que:

$(M \in (\mathscr{C}) \setminus \{O\}) \Leftrightarrow (M' \in (D))$

Soit $M(z)$ un point du plan tel que $M \neq O \quad (z \neq 0)$.

$$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow IM=2$$

$$\Leftrightarrow |z-2|=2$$

$$\Leftrightarrow \left|z'-\frac{1}{2}\right|=|z'|$$

$\Leftrightarrow I'M'=OM'$; où $I'\left(\frac{1}{2}\right)$

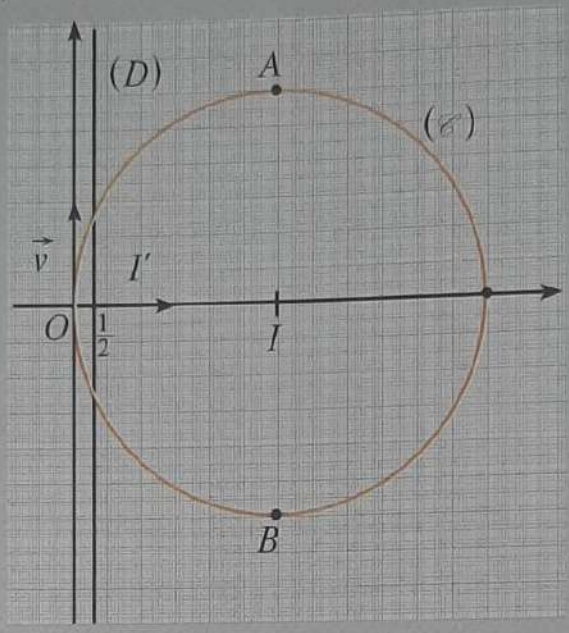
$\Leftrightarrow (M'$ appartient à la médiatrice de $[OI'])$

For more visit: L9ray.com CamScanner

* Déterminons une équation de la droite (D) médiatrice de $[OI']$

On a: $O(0;0)$ et $I'\left(\frac{1}{2};0\right)$; Donc $(D): x = \frac{x_{I'} + x_O}{2} = \frac{1}{4}$

• Construisons $(\mathscr{C})$ et (D) dans le même repère. (voir figure)



• Déduisons une méthode pour construire M' connaissant $M \in (\mathscr{C})$

Soit $M \in (\mathscr{C}) \setminus \{O\}$ et $M' = f(M)$

- d'après la question 2) b) ; $M' \in (OM)$

- d'après la question 3) b) ; $M' \in (D)$

Donc M' est le point d'intersection des droites (OM) et (D). (voir figure)

Exercice 44

Partie 1: $P(z) = z^3 - (4-i)z^2 + 4(2-i)z + 8i \quad ; z \in \mathbb{C}$

1)a)Montrons que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pur

On pose: $z = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$.

$(z = bi$ solution de $P(z) = 0) \Leftrightarrow P(bi) = 0$

$$\Leftrightarrow (bi)^3 - (4-i)(bi)^2 + 4(2-i)(bi) + 8i = 0$$
$$\Leftrightarrow (4b^2 + 4b) + i(-b^3 - b^2 + 8b + 8) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 + 4b = 0 : (E_1) \\ -b^3 - b^2 + 8b + 8 = 0 : (E_2) \end{cases}$$

$(E_1) \Leftrightarrow b = 0$ ou $b = -1$

$b = 0$ ne vérifie pas l'équation (E_2)

For more visit: L9ray.com CamScanner

$b=-1$ vérifie l'équation (E_2)

Donc: $z_0=-i$ est la seule solution imaginaire pure de l'équation $P(z)=0$

b) Déterminons les réels b et c tels que: $P(z)=(z+i)(z^2+bz+c)$

On a: $(z+i)(z^2+bz+c)=z^3+(b+i)z^2+(c+ib)z+ic$

Donc, par identification:

$$\begin{cases} b+i=-4+i \\ c+ib=8-4i \\ ic=8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ c=8 \end{cases}$$

D'où: $P(z)=(z+i)(z^2-4z+8)$

2) Résolvons l'équation $P(z)=0$

$$P(z)=0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2-4z+8)=0$$
$$\Leftrightarrow z=-i \text{ ou } z^2-4z+8=0$$

Le discriminant de l'équation $z^2-4z+8=0$ est $\Delta=-16=(4i)^2$

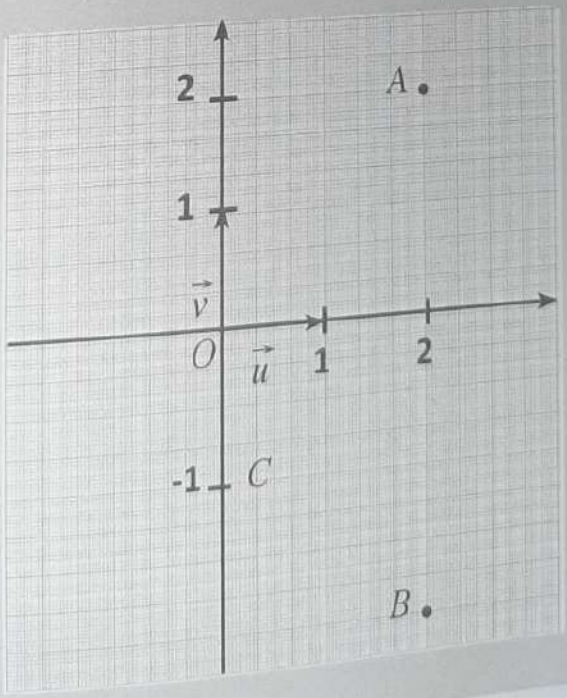
Donc les solutions de cette équation sont:

$$z_1=\frac{4+4i}{2}=2+2i \text{ et } z_2=2-2i$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est: $S=\{-i;2+2i;2-2i\}$

Partie 2:

1) Plaçons les points $A(2+2i)$; $B(2-2i)$ et $C(-mi)$ dans le cas $m=1$



For more visit: L9ray.com
CamScanner

2) Déterminons l'affixe de C'

C' est le symétrique de C par rapport à B, donc B est le milieu de $[CC']$

d'où: $\frac{z_C + z_{C'}}{2} = z_B$; donc: $z_{C'} = 2z_B - z_C = 4 - 4i + mi$

3) Déterminons les affixes des points K et H

- $R(C) = K \Leftrightarrow z_K = e^{i\frac{\pi}{2}} z_C$
  $\Leftrightarrow z_K = i(-mi) = m$ donc $\boxed{K(m)}$
- $R(C') = H \Leftrightarrow z_H = e^{i\frac{\pi}{2}} z_{C'}$
  $\Leftrightarrow z_H = i(4 - 4i + mi)$
  $\Leftrightarrow z_H = 4 - m + 4i$

Donc: $\boxed{H(4 - m + 4i)}$

4) Déterminons z_N et z_L

- $t(C) = N \Leftrightarrow z_N = z_C + 4i$
  $\Leftrightarrow z_N = i(4 - m)$

Donc: $\boxed{N(i(4 - m))}$

- $t(C') = z_L \Leftrightarrow z_L = z_{C'} + 4i$
  $\Leftrightarrow z_L = 4 + i(m - 4) + 4i$
  $\Leftrightarrow z_L = 4 + im$

Donc: $L(4 + im)$

5) a) Montrons que A est le milieu des segments $[LN]$ et $[KH]$

- $\frac{z_N + z_L}{2} = \frac{i(4 - m) + 4 + im}{2} = 2 + 2i = z_A$
- $\frac{z_K + z_H}{2} = \frac{m + 4i - (m - 4)}{2} = 2 + 2i = z_A$

Donc A est le milieu de $[LN]$ et $[KH]$

b) Montrer que: $\frac{z_H - z_A}{z_L - 3_A} = i$

$$\frac{z_H - z_A}{z_L - z_A} = \frac{4i - (m - 4) - 2 - 2i}{4 + im - 2 - 2i} = \frac{2 - m + 2i}{2 + i(m - 2)}$$
$$= \frac{i(2 + i(m - 2))}{2 + i(m - 2)}$$
$$= i$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc: $\frac{z_H - z_L}{z_L - z_A} = i$

c) Déduisons la nature de $KLHN$

$$\frac{z_H - z_A}{z_L - z_A} = i \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_H - z_A}{z_L - z_A}\right| = |i| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_L - z_A}\right) \equiv \arg(i)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AH = AL \\ (\overrightarrow{AL};\overrightarrow{AH}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

Donc: $AH = AL$ et $(AH) \perp (AL)$

Or les diagonales $[LN]$ et $[KH]$ du quadrilatère $KLHN$ ont le même milieu A, donc $KLHN$ est un parallélogramme; de plus $AH = AL$ et $(AH) \perp (AL)$ donc les diagonales de $KLHN$ sont orthogonales et de même longueur ; donc $KLHN$ est un carré.

Exercice 45

1) a) Vérifions que: $\frac{b-c}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3+i\sqrt{3})^2}{12}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc $\frac{b-c}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) Déduisons la nature du triangle ABC

$$\frac{b-c}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |e^{i\frac{\pi}{3}}| = 1 \\ \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \arg(e^{i\frac{\pi}{3}})[2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |b-c| = |a-c| \\ (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = AC \\ (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc le triangle ABC est un triangle équilatéral.

2) Déterminons le centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$.

Puisque le triangle ABC est équilatéral alors le centre du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC est le centre de gravité du triangle ABC.

On remarque que: $z_A + z_B + z_C = 0$ alors: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Donc O est le centre de gravité du triangle ABC.

D'où O est le centre du cercle $(\mathscr{C})$.

Puisque: $|a| = |b| = |c| = 2$; alors: $OA = OB = OC = 2$

Donc: $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 2.

3) a) Montrons que (Γ) est un cercle.

Soit $z \in \mathbb{C}$; on pose: $z = x + yi$; $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} M(z) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow 2(z+\overline{z}) + z\overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(2x) + x^2 + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$

Donc (Γ) est le cercle de centre $I(-2;0)$ et de rayon $r = 2$.

b) Vérifions que $A \in (\Gamma)$ et $B \in (\Gamma)$

- $IA = |z_A - z_I| = |1 + i\sqrt{3}| = 2 = r$, donc $A \in (\Gamma)$
- $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ donc $\overline{z}_B = -1 + i\sqrt{3}$

$2(z_B + \overline{z}_B) + z_B\overline{z}_B = -4 + 4 = 0$

Donc $\boxed{B \in (\Gamma)}$

4) a) Déterminons $r(B)$

Puisque le triangle ABC est équilatéral direct

alors: $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[3\pi] \end{cases}$

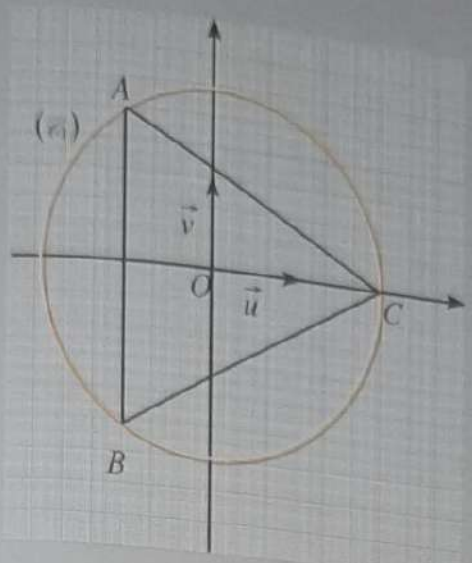
Donc: $\boxed{r(B) = C}$

b) • Construisons $C_1 = r(C)$ (voir figure)

$C_1 = r(C) \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AC_1 \\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AC_1}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On peut donc placer le point C_1.



• Déterminons l'affixe de C_1

$$C_1 = r(C) \Leftrightarrow z_{C_1} - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A)$$
$$\Leftrightarrow z_{C_1} = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A) + z_A$$
$$\Leftrightarrow z_{C_1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3 - i\sqrt{3}) - 1 + i\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow z_{C_1} = 2 + 2i\sqrt{3}$$

Donc $\boxed{C_1(2 + 2i\sqrt{3})}$

Exercice 46

1) a) Vérifions que:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$;

On a: $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n$ donc $z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_{n-1}$

D'où: $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$

b) Déduisons d_n en fonction de n

soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$

For more visit: L9ray.com
CamScanner

Donc: $|z_{n+1}-z_n|=\left|\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|\times|z_n-z_{n-1}|$

D'où: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ d_n=\frac{\sqrt{3}}{2}d_{n-1}$

Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $d_0=|z_1-z_0|=\left|-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{1}{2}$

D'où: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ d_n=d_0q^n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

c) • Déterminons L_n en fonction de n.

Soit $n\in\mathbb{N}$, $L_n=\sum_{K=0}^{n}A_KA_{K+1}$

$$=\sum_{K=0}^{n}|z_{K+1}-z_K|$$

$$=\sum_{K=0}^{n}d_K$$

$$=\sum_{K=0}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^K$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]=\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{2-\sqrt{3}}$$

• Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n$

On a: $-1<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=0$

D'où: $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

2) a) Déterminons a_{n+1} en fonction de a_n

Soit $n\in\mathbb{N}$;

$a_{n+1}\equiv\arg(z_{n+1})[2\pi]$

Or $z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_n$ et $\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Donc: $\arg(z_{n+1})\equiv\frac{\pi}{6}+\arg(z_n)[2\pi]$

D'où: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ a_{n+1}=\frac{\pi}{6}+a_n$

b) Déduisons a_n en fonction de n

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ a_{n+1} = \frac{\pi}{6} + a_n$

Donc (a_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{\pi}{6}$ et de premier terme $a_0 = 0$ (car $z_0 = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$)

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ a_n = \frac{n\pi}{6}$

c) Déterminons les valeurs de n pour lesquelles les points O, A_0 et A_n sont alignés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; puisque les points $O; A_0$ et A_n sont deux à deux distincts, alors:

$(O, A_0$ et A_n sont alignés$) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{A_n} - z_O}{z_{A_0} - z_O}\right) \equiv 0[\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_n}{z_O}\right) \equiv 0[\pi]$$
$$\Leftrightarrow \arg(z_n) - \arg(z_0) \equiv 0[\pi]$$
$$\Leftrightarrow a_n - a_0 \equiv 0[\pi]$$
$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ ;\ \frac{n\pi}{6} = k\pi$$
$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ ;\ n = 6k$$

Or $n \in \mathbb{N}$, donc les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si $n = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice 47

1) Déterminons l'ensemble $E = \{M(z) / t(z) \in \mathbb{R}\}$

Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose $z = x + yi$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

- $t(z) = z^2 + z + 1$
$= (x + yi)^2 + (x + yi) + 1$
$= (x^2 + x - y^2 + 1) + i(2xy + y)$

$M(z) \in E \Leftrightarrow t(z) \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(t(z)) = 0$
$\Leftrightarrow 2xy + y = 0$
$\Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Donc E est l'union des deux droites $(D_1): y = 0$ et $(D_2): x = -\frac{1}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) Déterminons l'ensemble

$F = \{M/(z)/O; M \text{ et } M' \text{ alignés}\}$

Soit $z \in \mathbb{C}$;

- Si $z = 0$, alors $M = O$ donc les points O, M et M' sont alignés (car dans ce cas on a juste deux points).

- Si $z \neq 0$, alors $M \neq O$

$$\frac{z_{M'} - z_O}{z_M - z_O} = \frac{t(z)}{z} = z + 1 + \frac{1}{z}$$

On pose $z = x + yi$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que: $(x;y) \neq (0;0)$

On a:

- $z + 1 + \frac{1}{z} = \left(x + 1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$

Donc: $\frac{t(z)}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}\left(\frac{t(z)}{z}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow (y = 0 \; ou \; x^2 + y^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow M \in ((Ox) \cup \mathscr{C}(O;1)) \setminus \{O\}$$

Donc l'ensemble F est l'union de l'axe des abscisses (privé de O) et du cercle de centre O et de rayon 1: $F = (Ox) \cup \mathscr{C}(O;1)$

Partie 2:

1) a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$z^2 + z + 1 = 0 : (E)$

- Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}\,i)^2$

- Les solutions de cette équation sont: $z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

Donc $S = \left\{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

b) • Vérifions que $u^{3m} = v^{3m} = 1$

u et v sont les solutions de l'équation (E), alors $u = z_1$ et $v = z_2$ (par exemple)

Donc: $u = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ et $v = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Soit $m \in \mathbb{N}$,

For more visit: L9ray.com CamScanner

* $u^{3m} = (e^{i\frac{4\pi}{3}})^{3m} = e^{i4m\pi} = 1$

* $v^{3m} = (\overline{u})^{3m} = (\overline{u^{3m}}) = 1$

Donc: $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}}$; $\boxed{u^{3m} = v^{3m} = 1}$

• Vérifions que: $(\forall n \in \mathbb{N}); (1+u)^{6n} = (1+v)^{6n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

* $1+u = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Donc $(1+u)^{6n} = (e^{-i\frac{\pi}{3}})^{6n} = e^{-i2n\pi} = 1$

* $1+v = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \; ; = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc: $(1+v)^{6n} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{6n} = e^{i2n\pi} = 1$

Donc: $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}); (1+u)^{6n} = (1+v)^{6n} = 1}$

2) a) Montrons que: $|z| = |1+z| = 1$

D'après l'énoncé, $\exists (p;q) \in (\mathbb{N}^*)^2 / (1+z)^q = 1$ et $z^p = 1$

* $z^p = 1 \Rightarrow |z^p| = |z|^p = 1$

$\Rightarrow |z| = \sqrt[p]{1} = 1$

* $(1+z)^q = 1 \Rightarrow |(1+z)^q| = 1$

$\Rightarrow |1+z| = 1$

Donc: $|z| = 1 = |1+z|$

b) • Montrons que $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$

• On a: $\left.\begin{array}{l} \arg(z) \equiv \theta[2\pi] \\ |z| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow z = e^{i\theta}$

Donc: $1+z = 1+e^{i\theta}$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})$

$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

Or $-\pi < \theta < \pi$, donc $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$

D'où $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ et par conséquent $|1+z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Or, d'après 2) a), $|1+z|=1$, donc $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=1$, d'où $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}$

• Déterminons z

$$\left.\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}\\ -\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{\theta}{2}=-\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \theta=-\frac{2\pi}{3}$$

de plus, $|z|=1$, donc: $z=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Donc: $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 48

1) a) Exprimons b' et c' en fonction de a, b et c

Le fait que les triangles BAB' et $C'AC$ ont un sommet commun A et sont rectangles isocèles en A, nous incite à considérer la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

* On a: $\begin{cases}AC=AC'\\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AC'})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$, donc $r(C)=C'$

$$r(C)=C'\Rightarrow c'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$

$$\Rightarrow c'=i(c-a)+a$$

$$\Rightarrow c'=ic+(1-i)a$$

* De même $r(B')=B$

$$r(B')=B\Rightarrow b-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(b'-a)$$

$$\Rightarrow b-a=i(b'-a)$$

$$\Rightarrow b'=-i(b-a)+a$$

$$\Rightarrow b'=-ib+(1+i)a$$

b) Déterminons m en fonction de b et c

M est le milieu de $[BC]$, donc: $z_M=\frac{z_B+z_C}{2}$; d'où: $m=\frac{b+c}{2}$

2) a) Exprimons $c'-b'$ en fonction de a et m

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a: $\begin{cases} c' = ic + (1-i)a \\ b' = -ib + (1+i)a \end{cases}$

Donc: $c' - b' = i(c+b) - 2ia$

$= 2i\left(\frac{c+b}{2} - a\right)$

$= 2i(m-a)$

D'où: $\boxed{c' - b' = 2i(m-a)}$

b) • Déduisons que $B'C' = 2AM$

$c' - b' = 2i(m-a)$

Donc: $|c' - b'| = |2i| \times |m-a|$

D'où: $B'C' = 2AM$

• Montrons que $(B'C') \perp (AM)$

On a: $c' - b' = 2i(m-a)$

Donc: $\frac{c'-b'}{m-a} = 2i$

D'où: $\arg\left(\frac{c'-b'}{m-a}\right) \equiv \arg(2i)[2\pi]$

Donc: $\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{B'C'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et par conséquent $(AM) \perp (B'C')$

Exercice 49

1) • Déterminons a' en fonction de c et b

Le fait que les triangles $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$ sont équilatéraux directs nous incite à considérer des rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$.

• Soit r_1 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Puisque le triangle $BA'C$ est équilatéral direct, alors: $r_1(B) = A'$

Donc : $a' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)$

D'où: $a' = c + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(b-c)$

$a' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)c + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)b$

Remarque: * $e^{i\frac{2\pi}{3}} = j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

For more visit: L9ray.com CamScanner

* $j^2=\overline{j}$; $j^3=\overline{j^3}=1$

* $1+j+j^2=0$

* j est une racine cubique de l'unité

On peut alors écrire: $a'=-j^2b-jc$

• Exprimons b' et c' en fonction de a,b et c.

* Le triangle $CB'A$ est équilatéral direct, on considère la rotation r_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a: $r_2(C)=B'$

Donc: $b'-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)$

D'où: $b'=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)a+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)c$

$b'=-ja-j^2c$

* Le triangle $AC'B$ est équilatéral direct , on considère la rotation r_3 de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors: $r_3(A)=C'$ et on obtient: $c'=-j^2a-jb$

2) • Montrons que: $a'-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(aj+b+cj^2)$

• $a'=-j^2b-jc\Rightarrow a'-a=-j^2b-jc-a$

Donc $a'-a=-j^2b-j^4c-j^3a$ (car: $j^3=1$ et $j^4=j$)

$=-j^2(b+j^2c+ja)$

or $-j^2=-\overline{j}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc: $a'-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b+j^2c+ja)$

• Calculons de même $b'-b$ et $c'-c$

* $b'=-ja-j^2c\Rightarrow b'-b=-ja-b-j^2c$

$\Rightarrow b'-b=-j^4a-j^3b-j^2c$

$\Rightarrow b'-b=-j^2(c+bj+j^2a)$

$\Rightarrow b'-b=e^{i\frac{\pi}{3}}(c+bj+j^2a)$

* $c'=-j^2a-jb\Rightarrow c'-c=-j^2a-jb-c$

$\Rightarrow c'-c=-j^2c-j^4b-j^3c$

$\Rightarrow c'-c=-j^2(a+j^2b+jc)$

$\Rightarrow c'-c=e^{i\frac{\pi}{3}}(a+j^2b+jc)$

3) a) Montrons que: $AA'=BB'=CC'$

For more visit: L9ray.com CamScanner

* $a'-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b+j^2c+ja)$

Donc: $|a'-a|=|e^{i\frac{\pi}{3}}|\times|b+j^2c+ja|$. D'où: $AA'=|b+j^2c+ja|$

* De même $BB'=|c+bj+j^2a|$

$=|j(b+ja+j^2c)|$

$=|j|\times|b+j^2c+ja|$

$=|b+j^2c+ja|$

$=AA'$

* De même $CC'=|a+j^2b+jc|$

$=|j^2(ja+b+j^2c)|$

$=|j|^2\times|ja+b+j^2c|$

$=|b+j^2c+ja|$

$=AA'$

Donc $AA'=BB'=CC'$

b) Montrons que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

Soit G le centre de gravité du triangle ABC et G' celui du triangle $A'B'C'$

On a: $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{a+b+c}{3}$ et $z_{G'}=\frac{a'+b'+c'}{3}$

Donc $z_{G'}-z_G=\frac{1}{3}(a'-a+b'-b+c'-c)$

$=\frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}(a+b+c)(1+j+j^2)$

Or: $1+j+j^2=0$, donc $z_{G'}=z_G$ et par conséquent $G'=G$, les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont donc le même centre de gravité.

Exercice 50

1) Déterminons une condition necessaire et suffisante pour que A,B et C soient alignés.

(A,B et C sont alignés) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A=B \text{ ou } A=C \\ \text{ou } (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv 0[\pi] \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a=b \text{ ou } a=c \\ \text{ou } \frac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a=b \text{ ou } a=-b \\ \text{ou } \frac{-b-a}{b-a}\in\mathbb{R} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left(a^2=b^2 \text{ ou } \frac{a+b}{a-b}\in\mathbb{R}\right)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc: A, B et C sont alignés si et seulement si $a^2 = b^2$ ou $\frac{a+b}{a-b} \in \mathbb{R}$.

2) a) Montrons que: $e = -ib + a(1-i)$

r est la rotation de centre A qui transforme C en E.

Puisque $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation r.

$$\begin{aligned} r(C) = E &\Leftrightarrow e - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a) \\ &\Leftrightarrow e = a + i(c-a) \\ &\Leftrightarrow e = a + i(-b-a) \end{aligned}$$

Donc $e = -ib + a(1-i)$

b) Déterminons α, β et γ en fonction de a et b.

* $ACDE$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$, d'où $z_D - z_C = z_E - z_A$

Donc: $\alpha - c = e - a$

D'où: $\alpha = e - a + c = -ib + a(1-i) - a - b$

Donc: $\alpha = -ia - (1+i)b$

* On a: $AF = AB$ et $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc $r(F) = B$

$$\begin{aligned} r(F) = B &\Rightarrow b - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(\gamma - a) \\ &\Rightarrow \gamma - a = -i(b-a) \\ &\Rightarrow \gamma = a - i(b-a) \end{aligned}$$

Donc $\gamma = -ib + (1+i)a$

* $AEHF$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FH}$, d'où: $e - a = \beta - \gamma$

$$\begin{aligned} e - a = \beta - \gamma &\Rightarrow \beta = \gamma + e - a \\ &\Rightarrow \beta = -ib + (1+i)a + i(-b-a) \\ &\Rightarrow \beta = -2ib + a \end{aligned}$$

c) • Déduisons que: $EF = 2OA$

On a: $z_F - z_E = \gamma - e$

$$\begin{aligned} &= -ib + (1+i)a + ib - a(1-i) \\ &= 2ai \end{aligned}$$

Donc: $|z_F - z_E| = |2ai|$

$$\begin{aligned} &= |2i| \times |a| \\ &= 2 \times OA \end{aligned}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc $EF = 2 \times OA$

• Montrons que: $(EF) \perp (OA)$

On a: $\gamma - e = 2ai \Rightarrow \dfrac{\gamma - e}{a} = 2i$

$\Rightarrow \arg\left(\dfrac{\gamma - e}{a}\right) \equiv \arg(2i)[2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{EF}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow (OA) \perp (EF)$

Donc les droites (EF) et (OA) sont perpendiculaires.

• Montrons que: $BD = CH$

On a: • $\alpha - b = -ia - (1+i)b - b$

$= -ia - b(2+i)$

• $\beta - c = -2ib + a + b$

Donc: $i(\beta - c) = 2b + ia + ib$

$= ia + b(2+i)$

Donc: $\alpha - b = -i(\beta - c)$

D'où: $\begin{cases} \arg\left(\dfrac{\alpha - b}{\beta - c}\right) \equiv \arg(-i)[2\pi] \\ \text{et} \\ |\alpha - b| = |-i| \times |\beta - c| \end{cases}$

Donc: $\begin{cases} (\overrightarrow{CH};\overrightarrow{BD}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ BD = CH \end{cases}$

Conclusion: $BD = CH$ et $(CH) \perp (BD)$

Exercice 51

1) Vérifions que $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et que $BCDE$ est un carré.

• $\dfrac{z_E - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{e - b}{c - b}$

$= \dfrac{1 - 3i - 1 + i}{-1 - i - 1 + i}$

$= i$

Donc: $\arg\left(\dfrac{z_E - z_B}{z_C - z_B}\right) \equiv \arg(i)[2\pi]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

D'où: $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

- $z_B - z_C = b - c = 1 - i + 1 + i = 2$
- $z_E - z_D = e - d = 1 - 3i + 1 + 3i = 2$

Donc: $z_B - z_C = z_E - z_D$

D'où: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DE}$ et par suite $BCDE$ est parallélogramme de plus $(BC) \perp (BE)$

donc $BCDE$ est un rectangle.

- $BC = |b - c| = 2$ et $BE = |e - b| = |-2i| = 2$

Donc $BC = BE$ et par suite $BCDE$ est un carré.

2) Calculons: $|b|;|c|;|d|$ et $|e|$

- $|b| = |1 - i| = \sqrt{2}$
- $|c| = |-1 - i| = \sqrt{2}$
- $|d| = |-1 - 3i| = \sqrt{10}$
- $|e| = |1 - 3i| = \sqrt{10}$

On remarque que: $|b| = |c|$ et $|d| = |e|$.

3) Déterminons une équation de $(\mathscr{C})$

$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O passant par le point B, donc son rayon est:

$r = OB = \sqrt{2}$

Donc: $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 = 2$

4) a) Interprétons géométriquement $|z|$ et $\arg(z)$.

$$z = \frac{g-q}{b-q} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \left|\frac{g-q}{b-q}\right| \\ \arg(z) \equiv \arg\left(\frac{g-q}{b-q}\right)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = \frac{QG}{QB} \\ \arg(z) \equiv (\overrightarrow{QB};\overrightarrow{QG})[2\pi] \end{cases}$$

b) Déduisons z

- $(\overrightarrow{QB};\overrightarrow{QG}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

• $QBFG$ est un carré, donc $QG = QB$

d'où: $\frac{QG}{QB} = 1$ et par suite $|z| = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ |z| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$$

5) a) Montrons que: $g = (1+x+y)+i(1-x+y)$

$$z = i = \frac{g-q}{b-q} \Rightarrow g - q = i(b-q)$$

Donc: $g = ib + (1-i)q$

$$= i(1-i)+(1-i)(x+yi)$$
$$= (x+y+1)+i(1+y-x)$$

b) Déduisons $|g|$ en fonction de x et y

$$|g| = |(x+y+1)+i(1-x+y)|$$
$$= \sqrt{(x+y+1)^2+(1-x+y)^2}$$
$$= \sqrt{2x^2+2y^2+4y+2}$$

6) Exprimons $|g|$ en fonction de y seul.

On a: $Q \in (\mathscr{C})$ et $q = x + yi$

donc $x^2 + y^2 = 2$; d'où $2x^2 + 2y^2 = 4$ et par suite $|g| = \sqrt{4y+6}$.

7) Montrons géométriquement que:

$|g| = |f|$

On a: $B \in (\mathscr{C})$ et $Q \in (\mathscr{C})$, donc $OB = OQ$ et par suite le point O appartient à la médiatrice du segment $[BQ]$. Or $QBFG$ est un carré, donc les segments $[QB]$ et $[GF]$ ont la même médiatrice, et par conséquent le point O appartient à la médiatrice de $[GF]$, donc $OG = OF$, d'où $|g| = |f|$.

8) Déterminons les valeurs de x et y pour que les points $E;D;G$ et F appartient à $\mathscr{C}(O;r)$.

• On a: $|d| = \sqrt{10} = |e|$ donc $OD = OE$ et par suite O appartient au cercle

For more visit: L9ray.com CamScanner

(Γ) de centre O et de rayon $\sqrt{10}$.

• On a: $|g| = \sqrt{4y+6}$

$$G \in (\Gamma) \Leftrightarrow |g| = \sqrt{10}$$
$$\Leftrightarrow 4y+6 = 10$$
$$\Leftrightarrow y = 1$$

• $Q \in (\mathscr{C}) \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$
$$\Rightarrow x^2 = 2 - y^2$$

• $G \in (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x^2 = 2 - y^2 \end{cases}$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ et } y = 1 \\ \text{ou} \\ x = -1 \text{ et } y = 1 \end{cases}$$

Or: $|f| = |g| = \sqrt{10}$, donc $F \in (\Gamma)$

Conclusion: Les points E, D, G et F appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon $\sqrt{10}$ si et seulement si $(x = 1$ et $y = 1)$ ou $(x = -1$ et $y = 1)$

Exercice 52

1) a) Interprétons géométriquement r et θ

On a: $z - i = re^{i\theta}$

Donc: • $|z - i| = |re^{i\theta}|$, donc $\boxed{AM = r}$

• $\arg(z - i) \equiv \arg(re^{i\theta})[2\pi]$

Donc $\boxed{(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) \equiv \theta[2\pi]}$

D'où θ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AM}})$.

b) Montrons que: $(z' + 2i) \times (z - i) = 1$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$

$$z'+2i = \frac{2z-i}{iz+1} + 2i$$
$$= \frac{2z-i-2z+2i}{iz+1}$$
$$= \frac{i}{iz+1}$$
$$= \frac{i}{i(z-i)}$$
$$= \frac{1}{z-i}$$

Donc: $(z'+2i)\times(z-i)=1$

c) Déterminons r' et θ' en fonction de r et θ

soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$

$$(z'+2i)\times(z-i)=1 \Rightarrow \begin{cases} |z'+2i|\times|z-i|=1 \\ \arg(z'+2i)+\arg(z-i) \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} r' \times r = 1 \\ \theta' + \theta \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} r' = \frac{1}{r} \\ \theta' \equiv -\theta[2\pi] \end{cases}$$

Interprétons géométriquement r' et θ'

- $r' = |z'+2i| = |z_{M'} - z_B|$ donc: $r' = BM'$
- $\arg(z'+2i) \equiv \theta'[2\pi]$ et $\arg(z'+2i) \equiv (\vec{u};\overrightarrow{BM'})[2\pi]$

Donc θ' est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\widehat{BM'})$.

- Donc: $BM' = \frac{1}{AM}$ et $(\vec{u};\overrightarrow{BM'}) \equiv -(\vec{u};\overrightarrow{AM})[2\pi]$

2) a) Montrons que si $M \in (\mathscr{C})$ alors $M' \in (\mathscr{C}')$

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$

$$M(z) \in (\mathscr{C}) \Rightarrow AM = 1$$
$$\Rightarrow r = 1$$
$$\Rightarrow r' = 1 \qquad (\text{car } r' = \tfrac{1}{r})$$
$$\Rightarrow BM' = 1$$

Donc si $M \in (\mathscr{C})$, alors $M' \in \mathscr{C}'(B;1)$ le point $M' = f(M)$ appartient au cercle $(\mathscr{C}')$ de

For more visit: L9ray.com CamScanner

centre B et de rayon 1.

b) • Vérifions si $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$.

D'après la question 2) a); pour tout point M du plan, si $M \in (\mathscr{C})$ alors $M' \in (\mathscr{C}')$

Donc $f((\mathscr{C})) \subset (\mathscr{C}')$ (1)

• Vérifions si $(\mathscr{C}') \subset f(\mathscr{C})$

Soit $M'(z')$ un point du cercle $(\mathscr{C}')$; existe t-il un point $M(z)$ de $(\mathscr{C})$ tel que $f(M) = M'$?

$$(\exists M(z) \in (\mathscr{C})) \; ; \; f(M) = M' \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{C}) \; ; \; \frac{2z-i}{iz+1} = z' \text{ et } |z-i| = 1$$

$$\Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{C}) \; ; \; 2z - i = z'(iz+1) \text{ et } |z-i| = 1$$

$$\Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{C}) \; ; \; (2 - iz')z = z' + i \text{ et } |z-i| = 1$$

Puisque $M' \in (\mathscr{C}')$; alors $|z' + 2i| = 1$

donc $z' \neq -2i$ d'où $2 - iz' \neq 0$

Donc: $(2 - iz')z = z' + i \Leftrightarrow z = \dfrac{z'+i}{2-iz'}$

- Vérifions que $|z-i| = 1$

$$|z-i| = \left|\frac{z'+i}{2-iz'} - i\right|$$

$$= \left|\frac{z'+i+2i-z'}{2-iz'}\right|$$

$$= \left|\frac{-i}{2-iz'}\right|$$

$$= \frac{1}{|2-iz'|}$$

$$= \frac{1}{|-i(z'+2i)|}$$

$$= \frac{1}{|z'+2i|}$$

$$M'(z') \in (\mathscr{C}') \Rightarrow |z'+2i| = 1$$

$$\Rightarrow |z-i| = 1$$

$$\Rightarrow M(z) \in (\mathscr{C})$$

Donc: $(\forall M' \in (\mathscr{C}')) \; ; \; (\exists M \in (\mathscr{C})) \; ; \; f(M) = M'$

D'où $\boxed{(\mathscr{C}') \subset f((\mathscr{C}))}$ (2)

For more visit: L9ray.com CamScanner

De (1) et (2) on conclut que $(\mathscr{C}') = f((\mathscr{C}))$

3) a) Montrons que $N \in (\mathscr{C})$

$$AN = |z_N - z_A|$$
$$= \left|\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i - i\right|$$
$$= \left|\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = 1$$

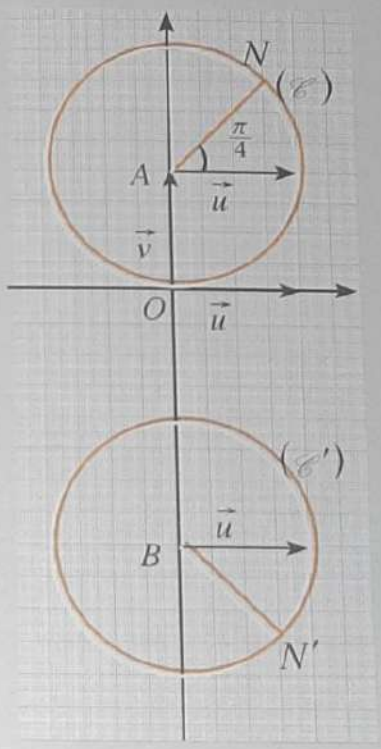
$AN = 1 \Rightarrow N \in (\mathscr{C})$

b) Déterminons une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AN}})$

* $(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AN}}) \equiv \arg(z_N - z_A)[2\pi]$

* $z_N - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ Donc: $(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AN}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Construisons $(\mathscr{C})$ et N (voir figure)



c) Déduisons la construction du point $N' = f(N)$

- On a: $N \in (\mathscr{C})$ et $f(\mathscr{C}) = (\mathscr{C}')$ donc $\boxed{N' \in (\mathscr{C}')}$ (3)

- D'après la question 1) c) $(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{BN'}}) \equiv -(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AN}})[2\pi]$ et $(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AN}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc: $(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{BN'}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ (4)

On peut alors construire le point N' (grâce à (3) et (4)).

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 53

1) Montrons que: $1+\omega+\omega^2=0$ et $\overline{\omega}=\omega^2$

On a: $\omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Donc: $1+\omega+\omega^2=1+e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}i=0$$

Donc: $1+\omega+\omega^2=0$

- $\omega^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}=\overline{\omega}$ (car $\frac{4\pi}{3}\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Donc $\omega^2=\overline{\omega}$.

2) a) Montrons que $\omega\in E$

$E=\{z\in\mathbb{C}/|z|=|1+z|=1\}$

* $|\omega|=|e^{i\frac{2\pi}{3}}|=1$

* $|1+\omega|=|-\omega^2|$

$=|\omega|^2$

$=1$

Donc: $|\omega|=|1+\omega|=1$

D'où: $\boxed{\omega\in E}$

b) Montrons que: $z\in E\Leftrightarrow\left(x=-\frac{1}{2}\text{ et }|y|=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

On a: $x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$z\in E\Leftrightarrow|z|=|1+z|=1$$
$$\Leftrightarrow|z|^2=|1+z|^2=1$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2=(1+x)^2+y^2=1$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1+x^2+y^2+2x\\x^2+y^2=1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=-1\\x^2+y^2=1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\left(x=-\frac{1}{2}\text{ et }|y|=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Donc: $z\in E\Leftrightarrow\left(x=-\frac{1}{2}\text{ et }|y|=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) Déduisons que $E=\{\omega;\overline{\omega}\}$

Soit $z=x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

d'après 2) b) ;

$z \in E \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \text{ et } |y| = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ et } y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega \\ \text{ou} \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{\omega} \end{cases}$$

Donc $\boxed{E = \{\omega ; \overline{\omega}\}}$

3) a) Montrons que: $|p| = |q| = 1$ et $1 + p = -q$

On a: $p = \frac{b}{q}$ et $q = \frac{c}{a}$

• Puisque les points $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}(O,r)$, alors $OA = OB = OC = r$; donc:

$|a| = |b| = |c| = r$ d'où: $|p| = \frac{|b|}{|a|} = 1$ et $|q| = \frac{|c|}{|a|} = 1$

Donc: $|p| = |q| = 1$

• Montrons que $1 + p = -q$

Puisque O est le centre de gravité du triangle ABC, alors:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Donc: $a + b + c = 0$

D'où: $1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$; (car $a \neq 0$)

et par suite: $1 + p + q = 0$

Donc $\boxed{1 + p = -q}$

b) Montrons que: $p = \omega$ ou $p = \overline{\omega}$

On a: $\begin{cases} |p| = 1 \\ |1 + p| = |-q| = |q| = 1 \end{cases}$

Donc: $p \in E$.

Or: $E = \{\omega ; \overline{\omega}\}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc $p = \omega$ ou $p = \overline{\omega}$.

c) Montrons que: $c - a = (\overline{\omega} - 1)a$ avec $p = \omega$ (dans cette question).

- $p = \omega \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \omega$

$\Rightarrow \dfrac{b}{a} - 1 = \omega - 1$

$\Rightarrow b - a = a(\omega - 1)$

- $1 + p = -q = -\dfrac{c}{a} \Rightarrow 1 + \omega = -\dfrac{c}{a}$

$\Rightarrow \dfrac{c}{a} = \overline{\omega}$

car $1 + \omega = -\omega^2 = -\overline{\omega}$

Donc: $\dfrac{c}{a} - 1 = \overline{\omega} - 1$

D'où: $\boxed{c - a = (\overline{\omega} - 1)a}$

- $a + b + c = 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} + 1 + \dfrac{c}{b} = 0$ (car $b \neq 0$)

$\Rightarrow \dfrac{c}{b} = -1 - \dfrac{a}{b}$

$\Rightarrow \dfrac{c}{b} = -1 - \dfrac{1}{\omega}$

$\Rightarrow \dfrac{c}{b} = -1 - \dfrac{\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}$ (car $\omega\overline{\omega} = |\omega|^2 = 1$)

$\Rightarrow \dfrac{c}{b} = -1 - \overline{\omega}$

$\Rightarrow \dfrac{c}{b} = \omega$ (car $1 + \omega = -\overline{\omega}$)

$\Rightarrow \dfrac{c}{b} - 1 = \omega - 1$

$\boxed{\Rightarrow c - b = (\omega - 1)b}$

d) Déduisons que le triangle ABC est équilatéral.

On a:

- $c - a = (\overline{\omega} - 1)a \Rightarrow |c - a| = |\overline{\omega} - 1| \times |a|$

$\Rightarrow |c - a| = |\omega - 1| \times r$

$\Rightarrow \boxed{AC = |\omega - 1| \times r}$

(car $|\overline{\omega} - 1| = |\omega - 1|$ et $|a| = OA = r$)

- $c - b = (\omega - 1)b \Rightarrow |c - b| = |\omega - 1| \times |b|$

$\Rightarrow |c - b| = |\omega - 1| \times r$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$\Rightarrow BC = |\omega - 1| \times r$

- $b - a = (\omega - 1)a \Rightarrow |b - a| = |\omega - 1| \times |a|$
$\Rightarrow |b - a| = |\omega - 1| \times r$

$\Rightarrow AB = |\omega - 1| \times r$

Donc: $AC = BC = AB$ et par conséquent le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 54

1) a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

$(E_\theta): z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2\theta} = 0 \; ; \; \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

- Le discriminant de cette équation est:

$\Delta = 4 - \frac{4}{\cos^2\theta} = -\frac{4\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = (2i\tan\theta)^2$

- Les solutions de cette équation sont:

$z = \frac{2 + 2i\tan\theta}{2} = 1 + i\tan\theta$

ou $z = 1 - i\tan\theta$

Donc l'ensemble des solutions de cette équation est:

$$E = \{1 + i\tan\theta; 1 - i\tan\theta\}$$

Autre méthode:

Remarque: $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$

Donc: $(E_\theta) \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 + \tan^2\theta = 0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2 - (i\tan\theta)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (z - 1 - i\tan\theta)(z - 1 + i\tan\theta) = 0$

$\Leftrightarrow z = 1 + i\tan\theta$ ou $z = 1 - i\tan\theta$

b) Écrivons z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

z_1 et z_2 sont les solutions de (E_θ).

$\text{Im}(z_1) = \tan\theta$ donc $z_1 = 1 + i\tan\theta$ et $z_2 = 1 - i\tan\theta = \overline{z_1}$

- $z_1 = 1 + i\tan\theta = 1 + i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Puisque $\theta =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$; alors $\cos\theta > 0$

donc $|z_1| = \frac{1}{\cos\theta}$ et $\arg(z_1) \equiv \theta[2\pi]$

Donc $z_1 = \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$ est une forme trigonométrique de z_1.

• Puisque $z_2 = \overline{z_1}$, alors une forme trigonométrique de z_2 est:

$z_2 = \frac{1}{\cos\theta}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

2) Montrons que le triangle OM_1M_2 est isocèle en O.

On a: $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.

• $OM_1 = |z_1| = \frac{1}{\cos\theta}$

• $OM_2 = |z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1| = \frac{1}{\cos\theta}$

Donc $OM_1 = OM_2$ et par conséquent le triangle OM_1M_2 est isocèle en O

3) Déterminons les solutions de (E) sous forme exponentielle.

$(E): z^{2n} - 2z^n + \frac{1}{\cos^2(\theta)} = 0$; $n \in \mathbb{N}^*$

On pose $Z = z^n$, l'équation (E) devient ; $Z^2 - 2Z + \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$

D'après 1) b)

$Z = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$ ou $Z = \frac{1}{\cos\theta}e^{-i\theta}$

Donc $z^n = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$ ou $z^n = \frac{1}{\cos\theta}e^{-i\theta}$

• Les solutions de l'équation $z^n = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$ sont les nombres complexes:

$z_K = \frac{1}{\sqrt[n]{\cos\theta}}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$; $K \in \{0;1;...;...(n-1)\}$

• Les solutions de l'équation $z^n = \frac{1}{\cos\theta}e^{-i\theta}$ sont les nombres complexes:

$z'_K = \frac{1}{\sqrt[n]{\cos\theta}}e^{\left(-\frac{\theta}{n}+\frac{2K\pi}{n}\right)}$

$K \in \{0;1;2;....;(n-1)\}$

Donc: l'ensemble des solutions de (E) est: $S = S_1 \cup S_2$ où:

$S_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt[n]{\cos\theta}}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2K\pi}{n}\right)}; K \in \{0;1;...;(n-1)\}\right\}$

et $S_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt[n]{\cos\theta}}e^{i\left(-\frac{\theta}{n}+\frac{2K\pi}{n}\right)}; K \in \{0;1;...;(n-1)\}\right\}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 55

Partie 1:

1) Montrer que: $|z|=1 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}$

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1;1\}$; $Z=\dfrac{z+1}{z-1}$

$$\begin{aligned} Z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{Z}=-Z \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}=-\frac{z+1}{z-1} \\ &\Leftrightarrow (\overline{z}+1)(z-1)=(\overline{z}-1)(-z-1) \\ &\Leftrightarrow \overline{z}z-\overline{z}+z-1=-\overline{z}z-\overline{z}+z+1 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z}=1 \\ &\Leftrightarrow |z|=1 \end{aligned}$$

Donc: $|z|=1 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}$

2) a) Montrer que: $Z=\dfrac{-i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

On a: $z=e^{i\theta}$, donc:

- $z+1=1+e^{i\theta}$
$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$
$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

- $z-1=-1+e^{i\theta}$
$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$
$= 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

Donc: $Z=\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}=\dfrac{1}{i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

D'où: $Z=-\dfrac{i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

- Déduisons le module de Z et $\arg(Z)$

On a: $Z=\dfrac{-i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Or: $-\pi<\theta<\pi$, donc $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

* si: $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire: $0<\theta<\pi$)

For more visit: L9ray.com CamScanner

alors $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

donc: $|Z| = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $\arg(Z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

* Si: $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 0$ (c'est-à-dire: $-\pi < \theta < 0$

alors: $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$ donc: $Z = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times e^{i\frac{\pi}{2}}$

D'où: $|Z| = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Montrons que: $(\overrightarrow{M'A};\overrightarrow{M'B}) \equiv \theta[2\pi]$

On a: $M'(Z)$; $A(1)$; $B(-1)$

Donc: $(\overrightarrow{M'A};\overrightarrow{M'B}) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_{M'}}{z_A - z_{M'}}\right)[2\pi]$

On a: $\frac{z_B - z_{M'}}{z_A - z_{M'}} = \frac{-1 - \frac{z+1}{z-1}}{1 - \frac{z+1}{z-1}} = z$

Donc: $\arg\left(\frac{z_B - z_{M'}}{z_A - z_{M'}}\right) \equiv \arg(z)[2\pi]$

D'où: $(\overrightarrow{M'A};\overrightarrow{M'B}) \equiv \theta[2\pi]$.

* Construisons M et M' dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{3}$

On a: $z = e^{i\theta}$ donc $|z| = 1$ d'où $OM = 1$

Le point M appartient donc au cercle $\mathscr{C}(O;1)$.

D'après la question 1), on a: $Z \in i\mathbb{R}$

donc $M'(Z)$ appartient à l'axe des imaginaires purs donc $\boxed{M'A = M'B}$ (1)

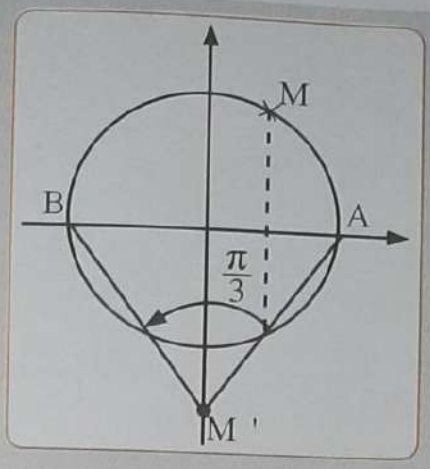
(car $A(1)$ et $B(-1)$ et le repère est orthogonal, donc l'axe des imaginaires purs est la médiatrice de $[AB]$).

Or $\theta = \frac{\pi}{3}$, donc $\boxed{(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]}$ (2)

Des relations (1) et (2) on conclut que le triangle ABM' est équilatéral.

On peut donc placer M' avec précision. (voir figure)

For more visit: L9ray.com CamScanner



Partie 2:

1) Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation (E)

$(E): \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = \sqrt{2}$

On pose: $u = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

alors, l'équation (E) devient: $u + \frac{1}{u} = \sqrt{2}$

C'est-à-dire: $u^2 - \sqrt{2}u + 1 = 0$

Le discriminant de cette équation est: $\Delta = -2 = (i\sqrt{2})^2$

Donc: $u = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$ ou $u = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$

D'où: $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$ ou $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$

• Pour: $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

Les solutions de cette équation sont les nombres z_k tels que:

$\frac{z_k + 1}{z_k - 1} = e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0; 1; ...; (n-1)\}$

C'est-à-dire: $z_k = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} + 1}{e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} - 1}$

Donc, d'après la question 2) a) $z_k = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\pi}{8n} + \frac{k\pi}{n}\right)}$

• Pour $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ qui peut s'écrire aussi: $\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\right)^n = e^{i\frac{\pi}{4}}$

Les solutions de cette équation sont les nombres complexes $\overline{z_k}$ avec

$k \in \{0; 1; ..., ..., n-1\}$ et par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équa-

For more visit: L9ray.com CamScanner

tion (E) est: $S=\{z_K;K\in\{0;1;...;...;(n-1)\}\}\cup\{\overline{z}_n;K\in\{0;1;...;(n-1)\}\}$

avec: $z_K=\dfrac{-i}{\tan\theta_K}$ où $\theta_K=\dfrac{\pi}{8n}+\dfrac{K\pi}{n}$

2) a) Montrons que: $(E)\Leftrightarrow P(z)=0$

Soit $z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$

$P(z)=0\Leftrightarrow\sqrt{2}(z^2-1)^n-(z+1)^{2n}-(z-1)^{2n}=0$

Puisque $P(1)=-2^{2n}$ et $P(-1)=-2^{2n}$. alors $P(1)\neq 0$ et $P(-1)\neq 0$

Donc: $z\neq 1$ et $z\neq -1$

D'où: $P(z)=0\Leftrightarrow\sqrt{2}-\dfrac{(z+1)^{2n}}{(z^2-1)^n}-\dfrac{(z-1)^{2n}}{(z^2-1)^n}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{(z+1)^{2n}}{(z-1)^n(z+1)^n}+\frac{(z-1)^{2n}}{(z-1)^n(z+1)}=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow(E)$$

Donc: $(E)\Leftrightarrow P(z)=0$

b) Montrons que: $P(z)=(\sqrt{2}-2)\prod_{K=0}^{n-1}\left(z^2+\dfrac{1}{\tan^2(\theta n)}\right)$

Rappel: Soit $P(z)$ un polynôme de degré n.

$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$

avec $a_n\in\mathbb{C}^*$; $a_i\in\mathbb{C}$ pour tout $i\in\{0;1;...(n-1)\}$ et $z\in\mathbb{C}$

si: $z_1;z_2;...;z_n$ sont les racines de $P(z)$,

alors : $(\forall z\in\mathbb{C});P(z)=a_n\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$

• Soit $Q(z)$ un polynôme de degré $2n$:

$Q(z)=\sum_{z=0}^{2n}a_kz^k$ avec $a_{2n}\in\mathbb{C}^*$ et $z\in\mathbb{C}$.

Si $\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n$ et $\beta_1;\beta_2;...\beta_n$ sont les racines de $Q(z)$, alors :

$$(\forall z\in\mathbb{C});Q(z)=a_{2n}\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)(z-\beta_i)$$

On a : $P(z)=0\Longleftrightarrow(E)$

Donc les équations $P(z)=0$ et (E) ont le même ensemble de solution.

Le coefficient de z^{2n} du polynôme $P(z)$ est $(\sqrt{2}-2)$; les racines de $P(z)$

For more visit: L9ray.com CamScanner

sont : $z_0; z_1; \ldots; z_{n-1}$ et $\overline{z_0}; \overline{z_1}; \ldots; \overline{z_{n-1}}$,

donc : $(\forall z \in \mathbb{C}) ; P(z) = (\sqrt{2}-2)\prod_{k=0}^{n-1}(z-z_k)(z-\overline{z_k})$

$= (\sqrt{2}-2)\prod_{k=0}^{n-1}\left(z+\frac{i}{\tan\theta_k}\right)\left(z-\frac{i}{\tan\theta_k}\right)$

$= (\sqrt{2}-2)\prod_{k=0}^{n-1}\left(z^2+\frac{1}{\tan^2\theta_k}\right)$

- Déduisons la valeur du produit : $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{8n}+\frac{k\pi}{n}\right)}$

Pour $z=0$, on a : $P(0) = (\sqrt{2}-2)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tan^2(\theta_k)}$

Donc : $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tan^2(\theta_k)} = \frac{P(0)}{\sqrt{2}-2}$

On a : $P(0) = \sqrt{2}(-1)^n - 1^{2n} - (-1)^{2n}$

$= (-1)^n\sqrt{2} - 1 - 1$

$= (-1)^n\sqrt{2} - 2$

Donc : $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{8n}+\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{(-1)^n\times\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2}$

$= \frac{(-1)^n-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

D'où : $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{8n}+\frac{k\pi}{n}\right)} = (1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-(-1)^n)$

Exercice 56

1) Montrons que : $\prod_{k=1}^{m} z_k = (-1)^m \times P(0)$

On a : $P(z) = z^m + \alpha_m z^{m-1} + \ldots + \alpha_2 z + \alpha_1$

Puisque : $z_1; z_2; \ldots; z_m$ sont les racines de $P(z)$, alors :

$(\forall z \in \mathbb{C}) ; P(z) = \prod_{k=1}^{m}(z-z_k)$. Donc : $P(0) = \prod_{k=1}^{m}(-z_k) = (-1)^m\prod_{k=1}^{m} z_k$

D'où : $\prod_{k=1}^{m} z_k = \frac{P(0)}{(-1)^m} = (-1)^m P(0)$

2) a) Déterminons les solutions de l'équation $P_{n,\theta}(z) = 0$:

Soit : Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$P_{n,\theta}(z) = (z+1)^n - e^{i2n\theta}$

$P_{n,\theta}(z) = 0 \Longleftrightarrow (z+1)^n = e^{i2n\theta}$

Les solutions de cette équation se déduisent des racines n$^{\text{ième}}$ de $e^{i2n\theta}$, c'est-à-dire les nombres complexes z_k tels que : $z_k + 1 = e^{i\left(2\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}$

Donc $z_k = e^{i\left(2\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} - 1$ avec $k \in \{0;1;...;(n-1)\}$

• Calculons le produit de ces solutions :

On a : $e^{i\alpha} - 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$

Donc : $e^{i\alpha} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$

D'où : $z_k = 2i\sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0;1;2;...;(n-1)\}$

D'après la question 1): $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^n \times P_{n,o}(0)$

Or : $P_{n,\theta}(0) = 1 - e^{i2n\theta}$

Donc : $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^n \times (1 - e^{i2n\theta})$

$= (-1)^n \times (-2i\sin(n\theta)e^{in\theta})$

D'où : $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = 2i(-1)^{n+1} \times \sin(n\theta)e^{in\theta}$

b) • Montrons que : $f_n(\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\theta \in \mathbb{R}^*$; on a: $f_n(\theta) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$

d'après la question 2)a), on a : $z_k = 2i\sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)}$

Donc : $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \prod_{k=0}^{n-1} 2i\sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)}$

$= 2^n \times i^n \times \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) \times \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)}$

$= 2^n \times i^n \times f_n(\theta) \times e^{i\sum_{k=0}^{n-1}\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)}$

$= 2^n \times i^n \times f_n(\theta) \times e^{i\left(n\theta + \frac{\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}\right)}$

$= 2^n \times i^n \times f_n(\theta) \times e^{i\left(n\theta + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)}$

$= 2^n \times i^n \times f_n(\theta) \times e^{in\theta} \times (e^{i\frac{\pi}{2}})^{n-1}$

$= 2^n \times\times i^{2n-1} \times f_n(\theta) \times e^{in\theta}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Or $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = 2i(-1)^{n+1} \times \sin(n\theta) \times e^{in\theta}$

Donc : $2i(-1)^{n+1} \times \sin(n\theta) \times e^{in\theta} = 2^n \times i^{2n-1} \times f_n(\theta) \times e^{in\theta}$

D'où : $f_n(\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$

• Calculons $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{f_n(\theta)}{\sin\theta} : \dfrac{f_n(\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \times \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1}{2^{n-1}} \times \dfrac{\sin(n\theta)}{\theta} \times \dfrac{\theta}{\sin\theta}$

Or : $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ et $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin(n\theta)}{\theta} = n$. Donc : $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{f_n(\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

c) Déduisons la valeur du produit $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$:

On a : $f_n(\theta) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + k\dfrac{\pi}{n}\right)$

$= \sin\theta \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\theta + k\dfrac{\pi}{n}\right)$

Donc : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\theta + k\dfrac{\pi}{n}\right) = \dfrac{f_n(\theta)}{\sin\theta}$. D'où : $\lim\limits_{\theta \to 0} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\theta + k\dfrac{\pi}{n}\right) = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{f_n(\theta)}{\sin\theta}$

Or : $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{f_n(\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$ et $\lim\limits_{\theta \to 0} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\theta + k\dfrac{\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

Donc : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

C'est-à-dire : $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \ldots \times \sin\left(\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right) = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

Exercice 57

1) Montrons que : $\prod_{k=1}^{n-1} v_k = (-1)^{n-1} \times i^{n-1}$

On a : $v_k = e^{-i\frac{k\pi}{n}}$ pour tout $k \in \{1; 2; \ldots; (n-1)\}$

Donc: $\prod_{k=1}^{n-1} v_k = \prod_{k=1}^{n-1} e^{-i\frac{k\pi}{n}}$

$= e^{-i\frac{\pi}{n}(1+2+\ldots+(n-1))}$

$= e^{-i\frac{\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}}$

$= e^{-i\frac{(n-1)\pi}{2}}$

$= (e^{-i\frac{\pi}{2}})^{n-1}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$= (-i)^{n-1}$

$= (-1)^{n-1} \times i^{n-1}$

D'où : $\prod_{k=1}^{n-1} v_k = (-1)^{n-1} \times i^{n-1}$

2) a) Exprimons $u_k - 1$ en fonction de v_k

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $u_k - 1 = e^{i\frac{2k\times\pi}{n}} - 1$

$= e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}})$

$= e^{i\frac{k\pi}{n}} \times 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Donc : $u_n - 1 = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{1}{v_k}$

b) Calculons $\prod_{k=1}^{n-1}(u_k - 1)$

On remarque que les nombres u_k ; pour $k \in \{0;1;2;....(n-1)\}$ sont les racines nième de l'unité.

On considère le polynôme : $P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 ; z \in \mathbb{C}$

On a : $P(1) = n$ donc $P(1) \neq 0$ (car $n \in \mathbb{N}^*$)

Donc $z = 1$ n'est pas une racine de $P(z)$.

• On a : $\forall z \in (\mathbb{C} \setminus \{1\}) ; 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$

Donc $P(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}$.

• $P(z) = 0 \Leftrightarrow 1 - z^n = 0$

$\Leftrightarrow z^n = 1$ et $z \neq 1$

$\Leftrightarrow z = u_k ; k \in \{1;2;...;(n-1)\}$

Donc : $(\forall z \in \mathbb{C}) ; P(z) = \prod_{k=1}^{n-1}(z - u_k)$. D'où : $P(1) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - u_k)$

or : $P(1) = n$, donc : $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - u_k) = n$

Puisque : $u_k - 1 = -(1 - u_k)$,

alors: $\prod_{k=1}^{n-1}(u_k - 1) = (-1)^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1}(1 - u_k) = (-1)^{n-1} \times n$

c) Déduisons $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

On a : $u_k - 1 = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}} = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{1}{v_k}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\prod_{k=1}^{n-1}(u_k-1)=\left(\prod_{k=1}^{n-1}2i\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\times\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{v_k}$

D'où : $(-1)^{n-1}\times n=2^{n-1}\times(i)^{n-1}\times\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\times\frac{1}{(-1)^{n-1}\times(i)^{n-1}}$

On en déduit que : $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 58

Partie A :

1) Vérifions que : $\Delta=(3-4i)^2$

On a : $(E): z^2-(1+2i)z+1+7i=0$

Le discriminant de cette équation est :

$\Delta=(1+2i)^2-4(1+7i)=1+4i-4-4-28i=-7-24i$

Or $(3-4i)^2=9-24i-16=-7-24i$

Donc le discriminant de (E) est : $\Delta=(3-4i)^2$

2) Déterminons z_1 et z_2 :

On a : $\Delta=(3-4i)^2$ donc : $8=3-4i$ est une racine carrée de Δ, par suite les solutions de (E) sont :

$z_1=\frac{1+2i+(3-4i)}{2}=2-i$ et $z_2=\frac{1+2i-(3-4i)}{2}=-1+3i$

3) Montrons que : $\frac{z_2}{z_1}=\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$

On a : $\frac{z_2}{z_1}=\frac{-1+3i}{2-i}=\frac{(-1+3i)(2+i)}{5}=\frac{-5+5i}{5}=-1+i$

Donc : $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=|-1+i|=\sqrt{2}$, par conséquent :

$$\frac{z_2}{z_1}=-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Ainsi : $\frac{z_2}{z_1}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Partie B:

1) a) Déterminons le complexe c :

R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc :

$r(A)=C\iff OA=OC$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

$\Leftrightarrow c = ia$

$\Leftrightarrow c = i(2-i) = 1+2i$

Ainsi l'affixe du point $C = R(A)$ est : $c = 1+2i$

b) Montrons que : $T(C) = B$

T est la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$, car $T(A) = O$, donc :

$$T(C) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AO}$$

$$\Leftrightarrow z_B - z_C = z_O - z_A$$

Or $z_C - z_A = c - a = -1+3i \Leftrightarrow z_B = z_C - z_A$

D'où : $T(C) = B$

2) • Déterminons le nombre d :

Le quadrilatère $OCDB$ est un parallélogramme signifie que :

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BD}$ par suite : $aff(\overrightarrow{OC}) = aff(\overrightarrow{BD})$

Donc : $d = b + c = 5i$

• Vérifions C est le milieu du segment $[AD]$:

On a: $A(2-i)$ et $D(5i)$ donc l'affixe du milieu du segment $[AD]$ est :

$$\frac{1}{2}(2-i+5i) = 1+2i = aff(C)$$

Ainsi le point C est le milieu du segment $[AD]$.

3) Montrons que $\left(\frac{a-d}{b-d}\right)\times\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$:

On a : $a-d = 2-6i$ et $b-d = -1-2i$

donc : $\frac{a-d}{b-d} = \frac{-2(1-3i)}{1+2i} = \frac{-2(1-3i)(1-2i)}{5} = 2(1+i)$

Et comme : $\frac{b}{a} = \frac{z_2}{z_1} = -1+i$ alors : $\left(\frac{a-b}{b-d}\right)\times\frac{b}{a} = 2(1+i)(-1+i) = -4$

Donc la nombre $\left(\frac{a-d}{b-d}\right)\times\frac{b}{a}$ est réel.

• Interprétation géométrique :

On a : $\left(\frac{a-d}{b-d}\right)\times\frac{b}{a} = \left(\frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}\right)\times\left(\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right) \in \mathbb{R}$, donc les points O, A, B et D sont alignés ou cocycliques.

Et puisque : $\frac{a-d}{b-d} \notin \mathbb{R}$ alors les points A, B et D ne sont pas alignés.

Ainsi les points O, A, B et D sont cocycliques.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 59

1) a) Vérifions que : $\Delta = (1-3i)^2$

On a : (E): $z^2-(1+i)z+2+2i=0$, alors le discriminant de cette équation est : $\Delta = (1+i)^2-4(2+2i) = 2i-8-8i = -8-6i$

Or $(1-3i)^2 = 1-6i-9 = -8-6i$

Donc le discriminant de (E) est : $\Delta = (1-3i)^2$

b) Déterminons z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) :

On a : $\Delta = (1-3i)^2$ donc : $\delta = 1-3i$ est une racine carrée de Δ.

Par suite les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{1+i-1+3i}{2} = 2i \text{ et } z_2 = \frac{1+i+1-3i}{2} = 1-i$$

c) Montrons que : $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

On a : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{2} = -1+i$

Comme $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |-1+i| = \sqrt{2}$ alors :

$$-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

C'est-à-dire : $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$. Ainsi : $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2) a) Déterminons le nombre complexe e :

On a: $A(z_1)$ et $B(z_2)$ alors l'affixe e du milieu E du segment $[AB]$ est le nombre complexe : $e = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

b) Montrons que : $c = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$

L'écriture complexe de la rotation de centre $A(2i)$ est d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ est : $z' = 2i+e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-2i)$ C'est-à-dire: $z' = -iz-2+2i$

Et on a : $r(E) = C$ donc : $c = -ie-2+2i = -i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)-2+2i$

Ainsi : $c = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$

c) • Montrons que $\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right) \in \mathbb{R}$

On a : $z_2-d = 1-i-1-\frac{3}{2}i = -\frac{5}{2}i$ et $c-d = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i-1-\frac{3}{2}i = -\frac{5}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\frac{z_2-d}{c-d}=i$

Et on a : $c-z_1=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i-2i=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ et $z_2-z_1=1-i-2i=1-3i$

Donc : $\frac{c-z_1}{z_2-z_1}=\frac{(-3-i)}{2(1-3i)}=\frac{-i(1-3i)}{2(1-3i)}=-\frac{1}{2}i$

D'où : $\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)=(i)\left(-\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}$

Ainsi le nombre $\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$ est réel.

• Interprétation géométrique :

On a : $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(c)$ et $D(d)$ et $\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)\in\mathbb{R}$

Donc les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques.

Puisque : $\frac{z_2-d}{c-d}=i$ c'est-à-dire : $\frac{z_2-d}{c-d}\notin\mathbb{R}$

alors les points B, C et D ne sont pas alignés.

D'où : les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 60

Partie A:

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+i=0$.

Soit $z\in\mathbb{C}$, on a : $z^2+i=0\iff z^2=-i$

$$\iff z^2=\frac{1}{2}(-2i)$$

$$\iff z^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^2$$

Donc : $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i);-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right\}$

2) a) Déterminons le module et un argument de $1+a$:

On note a la solution de l'équation $z^2+i=0$ telle que : $\mathrm{Re}(a)>0$

alors : $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, donc :

$$|a+1|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+1-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Et on a : $a+1=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1=1+e^{-i\frac{\pi}{4}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Comme $1+e^{-i\frac{\pi}{4}}=(e^{-i\frac{\pi}{8}})(e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}})$

d'après les formules d'Euler, on a : $e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Alors : $a+1=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\frac{\pi}{8}}$

Puisque : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ alors : $2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\frac{\pi}{8}}$ est l'écriture exponentielle du nombre $1+a$.

Ainsi : $\arg(1+a)\equiv-\frac{\pi}{8}[2\pi]$ et $|1+i|=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

b) Déduction :

On a : $1+a=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\frac{\pi}{8}}$ donc : $|1+a|=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

D'autre part : $|1+a|=\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Vérifions que : $(1+a)(1-a)=1+i$

Le nombre a est une solution de l'équation $z^2+i=0$

Donc : $a^2+i=0$ c'est-à-dire : $i=-a^2$

Par suite : $1+i=1-a^2=(1+a)(1-a)$

• Déduisons une forme trigonométrique de $1-a$:

On a : $(1+a)(1-a)=1+i$ alors : $1-a=\frac{1+i}{1+a}$

Comme $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

et $1+a=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{8}}$ alors : $1-a=\frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{8}}}=\sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)}$

Ainsi : $1-a=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,e^{i\frac{3\pi}{8}}$

C'est-à-dire : $1-a=\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$

Partie B:

1) Montrons que : $(ON)\perp(OM')$

On a : $zz'+i=0$ c'est-à-dire : $zz'=-i$ alors : $\arg(zz')\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Comme $\arg(zz')\equiv\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$ et $\arg(z)\equiv-\arg(\overline{z})[2\pi]$

alors : $\arg(zz')\equiv\arg(z')-\arg(\overline{z})[2\pi]$

Donc : $\arg(z')-\arg(\overline{z})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ c'est-à-dire : $\arg\left(\frac{\overline{z}}{z'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Et on a : $N(z)$ et $M'(z')$ alors : $\arg\left(\frac{\overline{z}}{z'}\right) \equiv (\overline{OM'};\overline{ON})\,[2\pi]$

Donc : $(\overline{OM'};\overline{ON}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, ainsi : $(OM') \perp (ON)$

2) a) Montrons que : $z' - a = -i\left(\frac{z-a}{az}\right)$

On a : $i\left(\frac{z-a}{az}\right) = i\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right) = -zz'\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right)$ car $zz' = -i$

$$= z' - \frac{zz'}{a} = z' + \frac{i}{a} = z' + \frac{ia}{a^2}$$

Comme : $a^2 = -i$ alors : $i\left(\frac{z-a}{az}\right) = z' - a$

Ainsi : $z' - a = i\left(\frac{z-a}{az}\right)$

b) Supposons que $z \neq -a$:

• Montrons que : $z' \neq -a$

On a : $zz' + i = 0 \Rightarrow z' = -\frac{i}{z}$ et $a^2 = -i$

Donc : $z' + a = -\frac{i}{z} + a = \frac{a^2}{z} + a = \frac{a}{z}(a + z)$

Comme : $z + a \neq 0$ alors : $\frac{a}{z}(z + a) \neq 0$, donc : $z' + a \neq 0$

Ainsi : $z \neq -a \Rightarrow z' \neq -a$

• Montrons que : $\frac{z'-a}{z'+a} = -\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$

On a : $z' = -\frac{i}{z}$ et $a^2 = -i$,

donc : $\frac{z'-a}{z'+a} = \frac{-\frac{i}{z} - a}{-\frac{i}{z} + a} = \frac{-\frac{ia}{z} - a^2}{-\frac{ia}{z} + a^2} = \frac{-ia + iz}{-ia - iz} = \frac{z-a}{-(z+a)}$

Ainsi : $\frac{z'-a}{z'+a} = -\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$

3) Supposons que les points A, B, M ne sont pas alignés :

Montrons que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM

Les points A, B, M ne sont pas alignés, soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABM.

On a : $\frac{z'-a}{z'+a} = -\frac{z-a}{z+a} \Leftrightarrow \frac{z_{M'} - z_A}{z_{M'} - z_B} = -\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$

$$\Leftrightarrow \frac{z_{M'} - z_A}{z_{M'} - z_B} \times \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} = -1$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

C'est-à-dire : $\frac{z_{M'}-z_A}{z_{M'}-z_B}\times\frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\in\mathbb{R}$, donc les points A, B, M et M' sont cocycliques, par conséquent le point M' appartient au cercle (Γ).

Exercice 61

1) a) • Vérifions que le nombre i est une solution de l'équation (E) :

On a :

$$(i)^3+(2-i)(i)^2+(m^2+1-2i)i-i(1+m^2)=-i-2+i+im^2+i+2-i-im^2=0$$

Donc le nombre i est une solution de l'équation (E).

• Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

On considère le polynôme $P(z)$ où $z\in\mathbb{C}$ défini par :

$$P(z)=z^3+(2-i)z^2+(m^2+1-2i)z-i(1+m^2)$$

On a i est une racine du polynôme $P(z)$ donc il existe deux nombres complexes b et c tels que :

$$(\forall z\in\mathbb{C});P(z)=(z-i)(z^2+bz+c)$$

Donc : Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a : $P(z)=z^3+(b-i)z^2+(c-ib)z-ic$

Par identification, on a : $\begin{cases}b-i=2-i\\c-ib=m^2+1-2i\\-ic=-i(1+m^2)\end{cases}$

Donc : $b=2$ et $c=1+m^2$

Par suite : $(\forall z\in\mathbb{C});P(z)=(z-i)(z^2+2z+1+m^2)$

Ainsi : $P(z)=0\Leftrightarrow z=i$ ou $z^2+2z+1+m^2=0$ (2)

Résolvons l'équation (2) : $z^2+2z+1+m^2=0$

Son discriminant est : $\Delta=4-4(1+m^2)=-4m^2=(2im)^2$

Les solutions de l'équation (2) sont :

$$z_1=\frac{-2-2im}{2}=-1-im \text{ et } z_2=\frac{-2+2im}{2}=-1+im$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S=\{i;-1-im;-1+im\}$$

b) Déterminons les valeurs de m pour que le produit des solutions de l'équation (E) soit égal à 1:

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $i(-1-im)\times(-1+im)=1 \Leftrightarrow i(1+m^2)=1$

$\Leftrightarrow m^2=-1-i$

Pour cela, on détermine m' et m'' les racines carrées de $-1-i$.

On pose : $m=X+iY$ avec $X\in\mathbb{R}$ et $Y\in\mathbb{R}$

On a : $m^2=-1-i \Leftrightarrow X^2-Y^2+2iXY=-1-i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2-Y^2=-1 \\ X^2+Y^2=\sqrt{2} \\ XY<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2=\sqrt{2}-1 \\ 2Y^2=\sqrt{2}+1 \\ XY<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ Y=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} X=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ Y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases}$$

D'où : $m'=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}-2}{2}}-i\sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}+2}{2}}$ ou $m''=-\sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}-2}{2}}+i\sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}+2}{2}}$

2) Écrivons z_1 et z_2 sous forme exponentielle :

On a : $z_1=-1+im=-1+e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha}$

$$=e^{i\pi}+e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$$

On a : $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

Donc l'écriture $z_1=2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$ est une forme exponentielle de z_1.

et $z_2=-1-im=e^{i\pi}-e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$=e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$=2i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $0 < \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ donc : $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

d'où l'écriture $z_2 = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ est une forme exponentielle de z_2.

Partie 2:

1) Déterminons l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points M, M_1 et M_2 soient alignés :

Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On a : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = \frac{-1 - im - m}{-1 + im - m} = \frac{1 + m(1+i)}{1 + m(1-i)}$

Donc : (Les points M, M_1 et M_2 sont alignés) $\iff \frac{z_2 - m}{z_1 - m} \in \mathbb{R}$

$$\iff \left(\frac{1 + m(1+i)}{1 + m(1-i)}\right) = \frac{1 + m(1+i)}{1 + m(1-i)}$$

$$\iff \frac{1 + \overline{m}(1-i)}{1 + \overline{m}(1+i)} = \frac{1 + m(1+i)}{1 + m(1-i)}$$

$$\iff (1 + \overline{m}(1-i))(1 + m(1-i)) = (1 + \overline{m}(1+i))(1 + m(1+i))$$

$$\iff 1 + m(1-i) + \overline{m}(1-i) - 2im\overline{m} = 1 + m(1+i) + \overline{m}(1+i) + 2im\overline{m}$$

$$\iff 4im\overline{m} + 2im + 2i\overline{m} = 0$$

$$\iff 4im\overline{m} + 2i(m + \overline{m}) = 0$$

$$\iff 2m\overline{m} + \mathcal{R}e(m) = 0 \quad (*)$$

On pose : $m = x + iy$ avec $(x;y) \neq (0;0)$

On a : $(*) \iff 2(x^2 + y^2) + 2x = 0$

$$\iff x^2 + y^2 + x = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Donc l'ensemble des points $M(m)$ tel que les points M, M_1 et M_2 sont alignés est le cercle (Γ) de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point O.

2) a) Montrons que R est une rotation :

Soit $M(m)$ un point du plan complexe et $M'(m')$ son image par R :

On a : $R(M) = M' \iff z' = iz - 1$

Déterminons le point invariant par R :

On a : $R(M) = M \iff z = iz - 1$

$$\iff z(1 - i) = -1$$

$$\iff z = \frac{-1}{1-i} = \frac{-1(1+i)}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On pose : $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $\Omega(\omega)$

On a donc : $R(M) = M' \iff z' = iz - 1$ et $\omega = i\omega - 1$ (car $R(\Omega) = \Omega$)

$$\iff z' - \omega = i(z - \omega)$$

$$\iff z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$$

D'où : R est la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Montrons que : $\frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \in i\mathbb{R} \iff m \times \overline{m} - \mathrm{Im}(m) = 0$

On a : $\frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} = \frac{-1 - im - m}{-1 - im + 1 - im} = \frac{1 + m(1+i)}{2im}$

Donc : $\frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \in i\mathbb{R} \iff \overline{\left(\frac{z_2 - m}{z_2 - z_1}\right)} = -\frac{z_2 - m}{z_2 - z_1}$

$$\iff \frac{1 + \overline{m}(1-i)}{-2i\overline{m}} = \frac{1 + m(1+i)}{-2im}$$

$$\iff m(1 + \overline{m}(1-i)) = \overline{m}(1 + m(1+i))$$

$$\iff m + mm - imm = m + mm + imm$$

$$\iff 2imm\overline{m} + \overline{m} - m = 0$$

$$\iff 2imm\overline{m} - 2i\,\mathrm{Im}(m) = 0$$

$$\iff m\overline{m} - \mathrm{Im}(m) = 0$$

c) Déduction :

Soit $M(z)$ tel que : $z \in \mathbb{C}^*$; on a : $z_1 = im - 1$

donc : $R(M) = M_1$ d'où : $\frac{z_1 - \omega}{m - \omega} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, C'est-à-dire : $\frac{z_1 - \omega}{m - \omega} \notin \mathbb{R}$,

donc les points M, M_1 et Ω ne sont pas alignés, par suite :

(Les points Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques) $\iff \frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \div \frac{\omega - m}{\omega - z_1} \in \mathbb{R}$

$$\iff \frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \times \frac{z_1 - \omega}{m - \omega} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \frac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \in i\mathbb{R}$$

(car $\frac{z_1 - \omega}{m - \omega} = i$) $\iff m \times \overline{m} - \mathrm{Im}(m) = 0$ (*)

En posant : $m = x + y$, on a : (*) $\iff x^2 + y^2 - y = 0$

$$\iff (x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Donc l'ensemble des points $M(m)$ tel que les points Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques est le cercle (Γ') de centre $\Omega'\left(\frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

For more visit: L9ray.com CamScanner

Exercice 62 **Session normale (Juin 20017)**

Partie I

1) Vérifions que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta = (2im)^2$

On a : $(E_m): 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$

Donc : $\Delta = 4(m+1+i)^2 - 8(m^2 + (1+i)m + i)$

$= 4m^2 + 4 - 4 + 8m + 8i + 8mi - 8m^2 - 8m - 8im - 8i$

$= -4m^2 = (2im)^2$

d'où : $\Delta = (2im)^2$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m)

L'équation (E_m) admet deux solutions z' et z'' qui sont :

$$z' = \frac{2(m+1+i) - 2im}{4} = \frac{m+1+i(1-m)}{2}$$

et $$z'' = \frac{2(m+1+i) + 2im}{4} = \frac{m+1+i(1+m)}{2}$$

Partie II

1) a) Vérifions que : $z_1 = iz_2 + 1$

On a : $iz_2 + 1 = i\left(\frac{1-i}{2}(m+i)\right) + 1$

$= \frac{1+i}{2}(m+i) + 1$

$= \frac{(1+i)(m+i) + 2}{2}$

$= \frac{m+i+im+1}{2}$

$= \frac{m+1+i(m+1)}{2}$

$= \frac{(1+i)(m+1)}{2}$

$= z_1$

Donc : $z_1 = iz_2 + 1$

b) Montrons que : $R(M_2) = M_1$ où R est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{1+i}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $z_1 = iz_2 + 1 \iff z_1 - \frac{1+i}{2} = iz_2 + 1 - \frac{1+i}{2}$

$\iff z_1 - \frac{1+i}{2} = iz_2 + \frac{1-i}{2}$

$\iff z_1 - \frac{1+i}{2} = i\left(z_2 - \frac{1+i}{2}\right)$

$\iff z_1 - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_2 - \omega)$

Donc : $R(M_2) = M_1$

2) a) Vérifions que : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i\frac{m-1}{m-i}$

On a : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = \frac{\frac{1-i}{2}(m+i) - m}{\frac{1+i}{2}(m+1) - m} = \frac{m + i - im + 1 - 2m}{m + 1 + im + i - 2m}$

$= \frac{1 - m + i(1-m)}{1 - m + im + i} = \frac{(1-m)(1+i)}{1 + im - (m-i)}$

$= \frac{(1-m)(1+i)}{i(m-i) - (m-i)} = \frac{(1-m)(1+i)}{(m-i)(-1+i)}$

$= \frac{-i(1-m)(-1+i)}{(m-i)(-1+i)} = i\frac{m-1}{m-i}$

Donc : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i\frac{m-1}{m-i}$

b) Supposons que les points M, M_1 et M_2 sont alignés

On a : $\frac{z_2 - z_M}{z_1 - z_M} \in \mathbb{R} \iff i\frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$

$\iff \frac{m-1}{m-i} \in i\mathbb{R}$

$\iff \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \in i\mathbb{R}$

$\iff (AM) \perp (BM)$

donc M appartient au cercle (Γ) de diamètre $[AB]$

c) Déterminons (E) l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques.

Si $m = i$ alors $M = B = M_1$ et dans ce cas, on a :

$$\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = \frac{i - \frac{1+i}{2}}{1 + i - \frac{1+i}{2}} = \frac{2(-1+i)}{1+i} = 2i$$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $\frac{z_1 - w}{z_2 - w} \notin \mathbb{R}$ donc les points M_1 , M_2 et Ω ne sont pas alignés d'où ils sont cocycliques.

• Si $m \neq i$, on a :

$$M(m) \in (E) \iff \left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \div \frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \times \frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(i \times \frac{m-1}{m-i} \times i\right) \in \mathbb{R}$$

$$\iff \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$$

$\iff$ (les points M , A et B sont alignés)

$$\iff M \in (AB) \setminus \{B\}$$

D'où (E) est la droite (AB)

Exercice 63 **Session de rattrapage (2017)**

1) Déterminons le nombre complexe z tel que les points M et M' soient confondus (c'est-à-dire $z' = z$)

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a : $z' = z \iff z = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

$$\iff 2z = z + \frac{1}{z}$$

$$\iff z^2 = 1$$

$$\iff z = 1 \text{ ou } z = -1$$

Donc les points $M(z)$ et $M'(z')$ sont confondus si $z = 1$ ou $z = -1$

2) Montrons que $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ pour $z \neq 1$ et $z \neq -1$

Soit $z \in \mathbb{C} - \{1; -1\}$ on a :

$$z' + 1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} + 2\right) = \frac{1}{2z}(z^2 + 2z + 1) = \frac{1}{2z}(z+1)^2$$

et $z' - 1 = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) - 1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} - 2\right) = \frac{1}{2z}(z^2 - 2z + 1) = \frac{1}{2z}(z-1)^2$

Donc : $\frac{z'+1}{z'-1} = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$

On a $M \in (\Delta) \Rightarrow MA = MB$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = 1 \text{(car } M \neq A \text{ et } M \neq B\text{)}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{M'B}{M'A} = 1$$

$$\Rightarrow M'B = M'A$$

$$\Rightarrow M' \in (\Delta)$$

4) Soit (Γ) le cercle dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres.

Soit $M(z)$ un point du plan complexe tel que $z \neq 0$

- Si $z = 1$ alors $M' = M = A$ et dans ce cas $M' \in (AB)$
- Si $z = -1$ alors $M' = M = B$ et dans ce cas $M' \in (AB)$
- Si $z \neq 1$ et $z \neq -1$ alors $M \neq A$ et $M \neq B$

On a : $M \in (\Gamma) \iff$ Le triangle MAB est rectangle en M

$$\iff \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{z'+1}{z-1} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Les points A , B et M' sont alignés.

$\Rightarrow M \in (AB)$

D'où Si le point M appartient au cercle (Γ) alors le point M' appartient à la droite (AB)

Exercice 64 **Bac 2018 session Normale**

Partie I

1) a) Vérifions que : $\Delta = (im - 2i)^2$

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $\Delta = (im+2)^2 - 4(im+2-m)$

$= (im)^2 + 4im + 4 - 4im - 8 + 4m$

$= (im)^2 + 4m - 4$

$= (im)^2 - 2(im)(2i) + (2i)^2 = (im-2i)^2$

b) Les solutions de l'équation (E_m) sont :

$z_1 = \dfrac{-(im+2)-(im-2i)}{2} = -im - 1 + i = -1 + i(1-m)$

et $z_2 = \dfrac{-(im+2)+(im-2i)}{2} = -1 - i$

2) Ecrivons z_1 et z_2 sous forme exponentielle sachant que : $m = i\sqrt{2}$

On a : $z_1 = -1 + \sqrt{2} + i = \sqrt{2} + \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(2\sin^2\dfrac{\pi}{8} + 2i\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}\right)$

$= 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}\left(\sin\dfrac{\pi}{8} + i\cos\dfrac{\pi}{8}\right)$

$= 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right)\right)$

$= 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$

Puisque : $0 < \dfrac{\pi}{8} < \dfrac{\pi}{2}$ alors $\sin\dfrac{\pi}{8} > 0$

Donc : $z_1 = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}e^{i\frac{3\pi}{8}}$

et on a : $z_2 = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Partie II

1) a) Vérifions que Ω est le centre de la rotation R

Soit $\Omega'(\omega')$ le centre de la rotation R

On a : $R(M) = M' \Leftrightarrow m' - \omega' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m - \omega')$

$\Leftrightarrow -im - 1 + i - \omega' = -im + i\omega'$

$\Leftrightarrow \omega'(1+i) = -1 + i$

$\Leftrightarrow \omega' = \dfrac{-1+i}{1+i} = \dfrac{i(1+i)}{1+i} = i = \omega$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc le centre de la rotation R est Ω

b) Déterminons l'affixe b du point B où $A = R(B)$

On a : R^{-1} est la rotation réciproque de la rotation R, donc son angle est $\frac{\pi}{2}$ et Ω est son centre, d'où : $R(B) = A \iff B = R^{-1}(A)$

$$\iff b - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - w)$$
$$\iff b = i(-1 - i - i) + i = 2$$

Donc : $b = 2$ est l'affixe du point B

2) a) Vérifions que : $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$

On a : $\frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b) = \frac{i + 1 + i}{i - 2} \times (m - 2)$

$$= \frac{1 + 2i}{-2 + i} \times (m - 2)$$
$$= \frac{-i(-2 + i)}{-2 + i}(m - 2)$$
$$= 2i - im$$

et : $m' - a = -im - 1 + i + 1 + i = 2i - im$

donc : $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$

b) Montrons que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω et M sont cocycliques.

• Si $m = -1 - i$ alors $M = A$ et dans ce cas les points A, B et Ω ne sont pas alignés (car le triangle est rectangle en Ω) et par suite, ils sont cocyliques

• Si $m \neq -1 - i$, on a :

(Les points A, M et M' sont alignés) $\iff \frac{m' - a}{m - a} \in \mathbb{R}$

$$\iff \frac{(\omega - a)(m - b)}{(\omega - b)(m - a)} \in \mathbb{R}$$
$$\iff \frac{\omega - a}{\omega - b} : \frac{m - a}{m - b} \in \mathbb{R}$$

$\iff$ Les points A, B, Ω et M sont cocycliques

c) Soit (E) l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points A, M et M' sont alignés.

$M(m) \in (E) \iff$ Les points A, M et M' sont alignés

$\iff$ Les points A, B, Ω et M sont cocycliques

For more visit: L9ray.com CamScanner

$\Leftrightarrow M \in (\mathscr{C})$ où $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au triangle $AB\Omega$

Puisque $R(B) = A$ alors le triangle est rectangle en Ω et par suite le centre I du cercle $(\mathscr{C})$ est le milieu du segment $[AB]$ et son rayon $r = \frac{AB}{2}$

On a : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-1-i+2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

et $r = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|2+1+i|}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Exercice 65 **Session de rattrape (2018)**

1) a) Vérifions que : $\forall z \in \mathbb{C}^* - \{i\}$; $h(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0$

Soit $z \in \mathbb{C}^* - \{i\}$, on a : $h(z) = z \Leftrightarrow i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) = z$

$$\Leftrightarrow \frac{z-2i}{z-i} = -iz$$
$$\Leftrightarrow z - 2i = -iz^2 - z$$
$$\Leftrightarrow iz^2 + 2z - 2i = 0$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0$$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 2 = 0$

Le discrimiant de l'équation (E) est : $\Delta = -4 + 8 = 4$

Les solutions de l'équation (E) sont :

$z_1 = \frac{2i-2}{2} = -1 + i$ et $z_2 = \frac{2i+2}{2} = 1 + i$ Donc : $S = \{1+i\,; -1+i\}$

2) a) Montrons que : $\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\frac{z-a}{z-b}$ où $z \in \mathbb{C}^* - \{i;a;b\}$

Soit $z \in \mathbb{C}^* - \{i;a;b\}$, on a :

$$\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = \frac{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) - a}{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) - b} = \frac{iz + 2 - az + ia}{iz + 2 - bz + ib}$$

$$= \frac{ia - az + ia + a^2 - 2ia}{iz - bz + ib + b^2 - 2ib}$$ (car a et b sont les solutions de (E)

$$= \frac{z(i-a) - a(i-a)}{z(i-b) - b(i-b)}$$ (c'est-à-dire : $a^2 - 2ia = 2$ et $b^2 - 2ib = 2$)

$$= \frac{(i-a)(z-a)}{(i-b)(z-b)}$$

or $\frac{i-a}{i-b} = \frac{i-(2i-b)}{i-b} = \frac{b-i}{i-b} = -1$ (car $a + b = 2i$)

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}=-\dfrac{z-a}{z-b}$

b) Déduction : $(\overrightarrow{M'B};\overrightarrow{M'A})\equiv \arg\left(\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}\right)[2\pi]$

$\equiv \arg\left(-\dfrac{z-a}{z-b}\right)[2\pi]$

$\equiv \pi+\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)[2\pi]$

$\equiv \pi+(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})[2\pi]$

3) a) Si les points M, A et B sont alignés alors :

$(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})\equiv 0[2\pi]$ où $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})\equiv \pi[2\pi]$

donc : $(\overrightarrow{M'B};\overrightarrow{M'A})\equiv 0[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{M'B};\overrightarrow{M'A})\equiv \pi[2\pi]$

D'où les points A, B et M' sont alignés.

b) Si les points M, A et B ne sont pas alignés alors on a :

$\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}=-\dfrac{z-a}{z-b}\Rightarrow \dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}\times\dfrac{z-b}{z-a}=-1$

$\Rightarrow \dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}\div\dfrac{z-a}{z-b}\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Les points M, A, B et M' sont cocycliques.

Exercice 66 BAC 2019 (Solution) Normale

I- 1) a) Montrons que le discriminant de l'équation (E)

On a : $\Delta=(1+i)^2(1+m)^2-8im$

$=2i(1+m)^2-8im$

$=2i(m^2+2m+1-4m)$

$=2i(m-1)^2$

Puisque $m\notin\mathbb{R}$ alors $m\neq 1$; donc Δ est non nul

b) Déterminons les solutions de l'équation (E)

On a : $\Delta=2i(m-1)^2=(1+i)^2(m-1)^2=((1+i)(m-1))^2$

Donc: $z_1=\dfrac{(1+i)(1+m)-(1+i)(m-1)}{2}=\dfrac{(1+i)(1+m-m+1)}{2}=1+i$

et $z_2=\dfrac{(1+i)(1+m)+(1+i)(m-1)}{2}=\dfrac{(1+i)(1+m+m-1)}{2}=m+im$

D'où : $S=\{1+i\,;m+im\}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

2) On suppose que : $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

a) Déterminons le module et un argument de $z_1 + z_2$

On a : $z_1 + z_2 = (1+i)(1+m)$

Puisque : $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1+m = e^{i0} + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$

Alors $z_1 + z_2 = 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

On a : $0 < \theta < \pi$ donc $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ d'où $\cos\frac{\theta}{2} > 0$

Ainsi : $|z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z_1 + z_2) \equiv \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) Montrons que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

On a : $z_1.z_2 = 2im$ donc : $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow 2im \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow m \in i\mathbb{R}$

$\Longrightarrow e^{i\theta} \in i\mathbb{R}$

$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ (car $0 < \theta < \pi$)

$\Longrightarrow m = i$

et par suite : $z_1 + z_2 = (1+i)(1+m) = (1+i)^2 = 2i$

D'où : si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II- 1) a) Montrons que l'affixe de Ω est $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$

On a D est l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

donc : $d = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-0) + 0 = ib = (-1+i)m$

D'autre part, on a : Ω est le milieu du segment $[CD]$, donc :

$$\omega = \frac{c+d}{2} = \frac{1-i+(-1+i)m}{2} = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$$

b) Calculons $\frac{b-a}{\omega}$

On a : $\frac{b-a}{\omega} = \frac{(1+i)m-(1+i)}{\frac{(1-i)(1-m)}{2}} = \frac{2(1+i)(m-1)}{(1-i)(1-m)} = \frac{-2(1+i)}{1-i}$

$= \frac{-2i(1-i)}{1-i} = -2i$

c) Déduction :

On a : $\frac{b-a}{\omega} = -2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Donc : $\left|\frac{b-a}{\omega-0}\right|=2$ et $\arg\left(\frac{b-a}{\omega-0}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où : $AB=2\Omega O$ et $\left(\overrightarrow{O\Omega};\overrightarrow{AB}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

c'est-à-dire : $AB=2\Omega O$ et $(O\Omega)\perp(AB)$

2) a) Montrons que $\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}$ et $\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}$

On a : les points A , B et H sont alignés car $H\in(AB)$

donc : $\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}$

• On a : $(O\Omega)\perp(AB)$ et $H\in(O\Omega)$ donc $(OH)\perp(AB)$

d'où : $\frac{h-0}{b-a}\in i\mathbb{R}$ c'est-à-dire : $\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}$

b) Déduisons h en fonction de m

On a : $\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}$ donc : $\frac{\overline{h}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}=\frac{h-a}{b-a}$

et $\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}$ donc : $\frac{\overline{h}}{\overline{b}-\overline{a}}=\frac{-h}{b-a}$

D'où : $\frac{\overline{h}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}+\frac{\overline{h}}{\overline{b}-\overline{a}}=\frac{h-a}{b-a}+\frac{-h}{b-a}$ c'est-à-dire : $\frac{2\overline{h}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}=\frac{-a}{b-a}$

Par suite : $\overline{h}=\frac{a\overline{b}-\overline{a}b}{2(a-b)}$

On a d'autre part : $a\overline{b}-\overline{a}b=(1+i)(1-i)\overline{m}-(1-i)(1+i)m$

$=2(\overline{m}-m)$

et $a-b=(1+i)-(1+i)m=(1+i)(1-m)$

donc : $\overline{h}=\frac{2(\overline{m}-m)}{2(1+i)(1-m)}=\frac{\overline{m}-m}{(1+i)(1-m)}$

D'où : $h=\frac{(m-\overline{m})}{(1-i)(1-\overline{m})}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{m-\overline{m}}{1-\overline{m}}\right)$

Exercice 67 **BAC 2019 Session de rattrapage**

I-1) a) Vérifions que le discriminant de (E_α) est $\Delta=\alpha^2$

On a : $\Delta=(i\alpha\sqrt{3})^2+4\alpha^2=-3\alpha^2+4\alpha^2=\alpha^2$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) :

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $\Delta = \alpha^2$

Donc les solutions de l'équation (E_α) sont :

$z_1 = \dfrac{i\alpha\sqrt{3}+\alpha}{2} = \alpha\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ et $z_2 = \dfrac{i\alpha\sqrt{3}-\alpha}{2} = \alpha\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

2) Écrivons z_1 et z_2 sous forme exponentielle :

On a : $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc : $z_2 = |\alpha|e^{i\lambda}.e^{i\frac{2\pi}{3}} = |\alpha|e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}$ et $z_1 = |\alpha|e^{i\lambda}.e^{i\frac{\pi}{3}} = |\alpha|e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}$

II- 1) a) Montrons que $R(\Omega) = M_1$ et $R(M_1) = M_2$

L'écriture complexe de la rotation R est : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-0)+0$

c'est-à-dire : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

- On a : $e^{i\frac{\pi}{3}}.\alpha = \alpha\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \alpha\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = z_1$

Donc : $R(\Omega) = M_1$

- On a : $e^{i\frac{\pi}{3}}z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}|\alpha|e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)} = |\alpha|e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)} = |\alpha|e^{i\lambda}.e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$= \alpha.\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = \alpha.\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = z_2$

Donc : $R(M_1) = M_2$

b) Déduction :

• On a : $R(\Omega) = M_1 \iff O\Omega = OM_1$ et $\left(\overrightarrow{O\Omega}\,;\overrightarrow{OM_1}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc le triangle $O\Omega M_1$ est équilatéral

• On a : $R(M_1) = M_2 \iff OM_1 = OM_2$ et $\left(\overrightarrow{OM_1}\,;\overrightarrow{OM_2}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc le triangle OM_1M_2 est équilatéral

2) a) Vérifions que : $z_1 - z_2 = \alpha$

On a : $z_1 - z_2 = \alpha\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \alpha$

b) Montrons que les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont perpendiculaires.

For more visit: L9ray.com CamScanner

On a : $\frac{z_2-\alpha}{z_1-0}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\,i(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}$

Donc : $\frac{z_2-\alpha}{z_1-0}\in i\mathbb{R}$ d'où : $(\Omega M_2)\perp(OM_1)$

c) Déduisons que $O\Omega M_1M_2$ est un losange

On a : $z_1-z_2=\alpha$ et $z_\Omega-z_0=\alpha$ donc : $z_{\overrightarrow{M_2M_1}}=z_{\overrightarrow{O\Omega}}$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{M_2M_1}=\overrightarrow{O\Omega}$ d'où : $O\Omega M_1M_2$ est un parallélogramme et puisque les diagonales $[OM_1]$ et $[\Omega M_2]$ sont perpendiculaires, alors le quadrilatère $O\Omega M_1M_2$ est un losange.

3) Montrons que pour tout réel θ, on a : $Z=\frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha}:\frac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel

On a : $\frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{2\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

et on a : $\frac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}}=\frac{|\alpha|e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}-|\alpha|e^{i\theta}}{|\alpha|e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}-|\alpha|e^{i\theta}}=\frac{e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}-e^{i\theta}}{e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}-e^{i\theta}}$

Donc : $\frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha}\div\frac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}}=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\,\frac{e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}e^{i\theta}}{e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}-e^{i\theta}}$

$$=\sqrt{3}\,\frac{e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{2}\right)}-e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}-e^{i\theta}}$$

$$=\sqrt{3}\,.\,\frac{e^{i\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}-e^{-i\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}\right]}{e^{i\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}-e^{-i\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}\right]}$$

$$=\sqrt{3}\,.\,\frac{2i\sin\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{2i\sin\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}\,.\,\frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

D'où : $(\forall\theta\in\mathbb{R})\,;Z\in\mathbb{R}$

For more visit: L9ray.com CamScanner

Sommaire

Chapitre 01	**Continuité d'une fonction numérique**	4
	I/ Continuité en un point - Continuité sur un intervalle	4
	II/ Image d'un intervalle par une fonction continue	5
	III/ Continuité de la composée de deux fonctions	6
	Exercices d'application	6
	IV/ Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone	29
	V/ Fonction racine nième	29
	VI/ Fonction arctan	30
	Exercices d'application	30
	Exercices de synthèse	62
Chapitre 02	**Dérivation et étude de fonctions**	84
	I/ Dérivée de la composée de deux fonctions	84
	II/ Dérivabilité d'une fonction réciproque	84
	III/ Dérivés des fonctions : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$	84
	IV/ Dérivées des fonctions : $x \longmapsto x^r$ et $x \longmapsto (u(x))^r$ ou $r \in \mathbb{Q}^*$	84
	Exercices d'application	85
	V/ Dérivée de la fonction Arctangente	99
	Exercices d'application	99
	VI/ Théorème de Rolle	112
	VII/Théorème des accroissements finis	112
	VIII/ Inégalité des accroissements finis	112
	Exercices d'application	113
	Exercices de synthèse	143
Chapitre 03	**Les suites**	206
	I/ Suite majorée ; suite minorée ; suite bornée.	206
	II/ Sens de variations d'une suite	206
	III/ Suites arithmétiques - suites géométriques	207
	Exercices d'application	207
	IV/ Limites usuelles	214
	V/ Convergence d'une suite	215
	VI/ Critères de convergence d'une suite	215
	Exercices d'application	216

For more visit: L9ray.com CamScanner

Chapitre 03	VII/ Suites (u_n) de type $u_{n+1} = f(u_n)$	247
	Exercices d'application	247
	VIII/ Suites adjacentes	254
	Exercices d'application	255
	Exercices de synthèse	277
Chapitre 04	**Fonctions logarithmiques**	326
	I/ Fonction logarithme népérien	326
	II/ Fonction logarithme de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)	328
	III/ Fonction logarithme décimale	328
	IV/ Variations de la fonction logarithme de base a	328
	Exercices d'application	329
	Exercices de synthèse	353
Chapitre 05	**Nombres complexes**	440
	I/ Forme algébrique d'un nombre complexe - opérations dans $\mathbb{C}$	440
	Exercices d'application	441
	II/ Conjugué d'un nombre complexe	446
	Exercices d'application	446
	III/Représentation géométrique d'un nombre complexe	452
	Exercices d'application	453
	VI/Module d'un nombre complexe	455
	Exercices d'application	455
	V/ Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul	462
	Exercices d'application	465
	VI/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul	474
	Exercices d'application	474
	VII/Racines nième d'un nombre complexe non nul - Équations du second degré dans $\mathbb{C}$	487
	Exercices d'application	489
	VIII/Écriture complexe des transformations usuelles	503
	Exercices d'application	505
	Exercices de synthèse	510

For more visit: L9ray.com CamScanner